



Calculs des poles de resonance associes a la diffraction d'ondes acoustiques et elastiques par un obstacle en dimension 2

Olivier Poisson, Patrick Joly

► To cite this version:

Olivier Poisson, Patrick Joly. Calculs des poles de resonance associes a la diffraction d'ondes acoustiques et elastiques par un obstacle en dimension 2. [Rapport de recherche] RR-1430, INRIA. 1991. inria-00075130

HAL Id: inria-00075130

<https://inria.hal.science/inria-00075130>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1430

Programme 6
Calcul Scientifique, Modélisation et
Logiciels numériques

CALCULS DES PÔLES DE RÉSONANCE ASSOCIÉS À LA DIFFRACTION D'ONDES ACOUSTIQUES ET ÉLASTIQUES PAR UN OBSTACLE EN DIMENSION 2

Olivier POISSON
Patrick JOLY

Juin 1991



★ R R - 1 4 3 8 ★

**Calculs des pôles de résonance associés à la diffraction
d'ondes acoustiques et élastiques par un obstacle en
dimension 2**

**Computation of resonance poles associated with the
diffraction of acoustic and elastic waves by a two
dimensional obstacle**

Olivier Poisson et Patrick Joly¹

¹INRIA domaine de Voluceau, 78153 le Chesnay CEDEX

Résumé

Nous nous intéressons à la diffraction d'ondes acoustiques et élastiques dans un domaine non borné de \mathbb{R}^2 . Nous introduisons la notion de résonance comme pôle du prolongement méromorphe à \mathbb{C} de l'amplitude de diffusion. Nous établissons une caractérisation de ces résonances comme zéros des valeurs propres d'un opérateur défini sur le bord de l'obstacle par une formulation variationnelle. Celle-ci permet la conception d'une méthode numérique dont nous présentons quelques résultats.

Abstract

We are concerned by the diffraction of acoustic and elastic waves in a \mathbb{R}^2 -non bounded domain. We introduce the concept of resonance as poles of the meromorphic extension in \mathbb{C} of the scattering amplitude. We establish a characterisation of them as zeros of the eigenvalues of an operator which is defined on the boundary of the obstacle. We give a variational formulation to define this operator, adapt it to a numerical method, and then present some results.

Mots-clés

Résonances. Ondes Acoustiques. Diffraction. Elastodynamique. Opérateur Méromorphe. Fissure.

Keywords

Resonancies. Acoustic Waves. Scattering. Elastodynamic. Meromorphic Operator. Crack.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Ondes acoustiques	6
2.1	Présentation générale	6
2.1.1	Position du problème	6
2.1.2	Définition des résonances	7
2.1.3	Quelques théorèmes sur la répartition des résonances dans \mathbb{C}	8
2.2	Exemple : le cas du cercle en dimension 2	11
2.2.1	Résolution du problème	11
2.2.2	Détermination de quelques résonances	11
2.3	Etude de la fissure ouverte	12
2.3.1	Notations	12
2.3.2	Définition des résonances	13
2.3.3	Autres propriétés de T	15
2.4	Etude générale du problème numérique	17
2.4.1	Définition de l'opérateur discret et des résonances numériques . . .	17
2.4.2	Convergence de l'opérateur discret et des résonances numériques . .	18
2.4.3	Algorithme de recherche des résonances	24
2.5	La fissure rectiligne: Calculs, Résultats, Conjectures	26
2.6	Passage à la diffraction par un ouvert d'intérieur non vide	29
3	Ondes élastiques	30
3.1	Présentation générale	30
3.2	Exemple : cas du disque élastique	32
3.2.1	Caractérisation de la solution	32
3.2.2	Calculs numériques	37
3.3	Exemple 2: la fissure rectiligne élastique	38
3.4	Calculs numériques pour la fissure rectiligne	39
3.5	Conjectures	40
4	Conclusion	41
5	Annexe—Compléments—Notations	42
5.1	Notations diverses	42
5.2	Rappels sur les fonctions de Bessel et Hankel	42
5.3	Notes sur $H_{\infty}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	44
5.4	Notes sur T_h , fissure acoustique rectiligne	46
5.4.1	Normes équivalentes	46
5.4.2	Calculs des a_{ij}	46
5.5	Etude de la fissure rectiligne par coordonnées elliptiques	48
5.6	Fissure acoustique: condition de Dirichlet	50

5.6.1	Définition/Caractérisation de l'opérateur S_1 et des résonances . . .	50
5.6.2	Etude numérique	51
5.7	Notes sur $T(\omega)$, fissure rectiligne élastique	53
5.7.1	Expression de $T(\omega)$ et de sa dérivée	53
5.8	Etude de la section efficace en dim2	55
5.8.1	Ondes acoustiques	55
5.8.2	Ondes élastiques: cas du disque (de rayon 1)	58

1 Introduction

L'étude de la propagation d'une onde dans un milieu mène à la recherche de modes propres de vibrations, permettant de caractériser l'onde après la fin du régime transitoire ($t \rightarrow +\infty$). Ainsi le problème acoustique dans un domaine borné $\Theta \subset \mathbb{R}^N$ ($N=2$ ou 3) :

$$\mathcal{P}_\Theta \begin{cases} -\Delta u - \omega^2 u = f \\ u = 0 \\ u \in H^1(\Theta) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma = \delta\Theta \quad (1)$$

où ω est réel, $f \in L^2(\Theta)$. La condition frontière de Dirichlet peut être remplacée par celle de Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

Remarquons que l'équation (1) impose $\Delta u \in L^2(\Theta)$, donc la formule de Green définit bien la dérivée normale de u sur Γ .

\mathcal{P}_Θ met en évidence les résonances intérieures de Θ : ce sont les fréquences ω pour lesquelles il n'y a pas unicité d'une solution de \mathcal{P} , c'est-à-dire telles que ω^2 est valeur propre de $\{-\Delta; \mathcal{D}(-\Delta) = H_0^1(\Theta)\}$, pour la condition de Dirichlet.

Lors de la diffraction d'une onde par l'obstacle $\Theta = \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$, le domaine où l'onde est décrite est Ω non borné, et le concept de résonance n'est plus aussi évident. En effet, si $z = \omega^2$ est considéré dans \mathbb{C} , $H^1(\Omega)$ n'est le bon espace que si $z \notin \mathbb{R}_+$. Cherchons donc u dans $H_{loc}^1(\Omega)$ et décroissant à l'infini en $|x|^{-\frac{N-1}{2}}$. Alors \mathcal{P}_Ω n'a de solution unique que lorsque $z \notin \mathbb{R}_+$. Autrement dit, le spectre de $-\Delta$ est continu: c'est \mathbb{R}_+ . Cependant, on écrit la solution du problème de Cauchy (contenant l'équation des ondes) à l'extérieur de Θ sous la forme:

$$" \quad \hat{U}(x, t) = \sum_{j \in I} \Phi_j(x) e^{-i\lambda_j t} \quad " \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty$$

" " signifie: avec quelques restrictions (notamment sur Θ), et selon un certain sens. $\{\lambda_j\}_{j \in I}$ est un sous-ensemble discret de \mathbb{C}_-^1 . Les λ_j sont appelés résonances (extérieures) de Θ .

A priori, ces fréquences interviennent dans l'étude ici exclusivement mathématique du problème précédent. Le fait qu'elles soient liées intimement à la géométrie de l'obstacle diffractant, à l'onde diffractée, qu'elles donnent la décroissance en temps de l'énergie locale associée, prouve qu'elles ont une place comparable aux fréquences réelles du problème intérieur. Les interprétations et les applications physiques ne manquent pas, notamment dans Uberall [23, 25, 24, 26], Lenoir [16], Hasard [9] pour l'influence de la houle sur un bateau.

¹ \mathbb{C}_- (respect: \mathbb{C}_+) est l'ensemble des complexes de partie imaginaire strictement négative (respect: positive)

Nous proposons dans ce rapport d'étudier les résonances liées aux équations de Helmholtz et de l'élasticité (linéaire isotrope), le séparant en deux parties bien distinctes: Dans la partie 2, consacrée à l'acoustique, nous posons les définitions, caractérisations, propriétés générales, accompagnées de l'exemple classique de la diffraction par le disque. Suivent l'étude du problème numérique et de la convergence des résonances numériques, et l'application au calcul des résonances de la fissure rectiligne. Dans la partie 3, une démarche similaire est effectuée dans le cadre des équations de l'élasticité linéaire isotrope; mais l'aspect théorique est plus sommaire (pour éviter des répétitions inutiles).

L'accent sera mis sur la diffraction par obstacle dans le plan ($N = 2$), puisque nous nous y sommes limités lors des applications numériques. Le contenu théorique ne change pas (si cela n'est pas précisé) lors du passage à l'espace de dimension 3. Les différentes propositions sur la répartition des résonances dans \mathbb{C} ont aussi pour objet de souligner l'importance de la "première courbe de pôles" (ceux qui sont le plus proche de l'axe réel) et de son comportement "à l'infini" (c'est-à-dire trouver $\Im(\lambda_j) = \text{fonct}(\Re(\lambda_j))$ quand $\Re(\lambda_j) \rightarrow \infty$), puisque ce sont les seuls dont on reconnaisse jusqu'à présent l'intérêt physique.

2 Ondes acoustiques

Nous allons étudier d'abord l'équation de Helmholtz à l'extérieur d'un domaine Θ d'intérieur non vide, poser quelques théorèmes (et définitions) sans véritables démonstrations (qui se trouvent néanmoins dans les références). Puis nous recommençons plus méticuleusement le travail en considérant un obstacle diffractant sans intérieur: une fissure ouverte (elle ne repasse pas par dessus elle-même, et les bouts sont disjoints). Nous verrons par la suite qu'il suffit de fermer la fissure (les extrémités sont jointes) pour revenir au cas précédent où un "intérieur" est défini, complétant les démonstrations manquantes.

2.1 Présentation générale

2.1.1 Position du problème

Θ est un obstacle borné de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ assez régulière. Ω est son complémentaire ouvert, non borné. ω désigne une fréquence complexe. Nous reprenons les notations de l'introduction pour \mathbb{C}_+ et \mathbb{C}_- , en posant de plus:

$$\mathbb{C}_{-+} = \{z \in \mathbb{C}_-, \Re(z) > 0\}$$

L'expression condition D (respect: condition N) signifiera que l'onde u vérifie une condition limite du type Dirichlet (respect: du type Neumann).

Soit le problème

$$\mathcal{P} \begin{cases} -\Delta u - \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ (\frac{\partial u}{\partial N})_{\Gamma} = g & \in H^{-1/2}(\Gamma) \\ u \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Nous considérons là: $\omega \in \mathbb{C}_+$.

Théorème 2.1 *Si $\omega \in \mathbb{C}_+$, alors \mathcal{P} admet une solution unique $u = R(\omega)g$. $R(\omega)$ est un opérateur de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^1(\Omega)$.*

En effet, si $\omega \in \mathbb{C}_+$, la forme b qui suit est coercive dans $(H^1(\Omega))^2$:

$$b(u, v) = \int_{\Omega} [\nabla u \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}] d\Omega$$

si $\omega \in \mathbb{R}_+$, on utilise alors le

Théorème 2.2 (Wilcox[29]²)

² Wilcox l'a démontré pour la dim 3

$R(\omega)$ se prolonge continûment en opérateur de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H_{loc}^1(\Omega)$ lorsque ω passe de \mathbb{C}_+ à \mathbb{R}_+ . ω étant réel, $u = R(\omega)g$ est alors solution du problème suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u - \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ (\frac{\partial u}{\partial N})_\Gamma = g & \in H^{-1/2}(\Gamma) \\ u \in H_{loc}^1(\Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u = o(\frac{1}{r^{\frac{N-1}{2}}}) \text{ quand } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

La dernière équation exprime que l'onde u est "sortante". On l'appelle condition de rayonnement "sortant" de Sommerfeld.

Ce théorème connu est dit "d'absorption limite".

2.1.2 Définition des résonances

Nous admettons que $R(\omega)$ est analytique en ω dans $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}^*$ si $N = 2$ et $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ si $N = 3$. Cela vient de ce que la solution fondamentale de:

$$(1) \quad -\Delta G - \omega^2 G = \delta \text{ dans } \mathbb{R}^N$$

est :

$$\begin{aligned} G(\omega, x) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\omega|x|) & N = 2 \\ &= \frac{\exp(i\omega|x|)}{4\pi|x|} & N = 3 \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} S(\omega) : H^{-1/2}(\Gamma) &\longrightarrow H^{1/2}(\Gamma) \\ g &\longmapsto (R(\omega).g)_\Gamma \end{aligned}$$

Théorème 2.3 $(S(\omega))_{\omega \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}^*}$ est une famille analytique d'opérateurs inversibles (pour le cas $N = 2$; si $N = 3$, l'analyticité s'étend à zéro).

En effet, soit $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$; le problème \mathcal{P} avec condition D: $(u)_\Gamma = f$ possède une solution unique $u(f, \omega)$ lorsque $\omega \in \mathbb{C}_+$. Si nous posons alors:

$$g = \frac{\partial u(\omega, f)}{\partial n} \equiv T(\omega)f$$

cela définit

$$T(\omega) : H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

et l'on vérifie immédiatement que $S^{-1} \equiv T$ pour tout ω .

Théorème 2.4 S et T se prolongent de façon méromorphe à $\mathbb{C}_- \setminus -i\mathbb{R}_+$ (si $N = 2$).

Définition 2.1 Les résonances de \mathcal{P} sont les pôles de S

Remarques:

- On obtient d'autres résonances en considérant les pôles du prolongement de T . Nous les appellerons résonances "D" (pour "Dirichlet"), celles de la définition précédente étant qualifiées par "N" ("Neumann").

- Les références: Lenoir, Vullierme-Ledard[16] et Ramm[21] proposent des démonstrations du théorème. Nous ferons de même dans le cas plus simple d'une fissure (qui peut être étendu au cas général: voir section 2.6). L'analyticité de S et T dans $\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}_+^*$ découle de celle de $R(\omega)$ et $u(\omega, \cdot)$.

- ω est un pôle de S ssi 0 est valeur propre de $T(\omega)$, à moins que (et c'est un cas particulier "rare") T ne puisse non plus être défini en ω , c'est-à-dire que l'on a le cas d'une résonance D et N.

- Pour comprendre l'existence de résonances, il faut voir que le franchissement de l'axe réel par ω correspond au passage de ω^2 à travers le spectre continu \mathbb{R}_+ de $-\Delta$.

- En dimension 2, la fonction de Hankel $H_0^{(1)}(\omega|x|)$ a la coupure $-i\mathbb{R}_+$; nous nous contenterons donc de chercher les résonances dans \mathbb{C}_{-+} , ce qui n'exclut bien sûr pas leur présence au-delà de celle-ci.

2.1.3 Quelques théorèmes sur la répartition des résonances dans \mathbb{C}

Les théorèmes qui suivent ont été construits principalement grâce à l'approche "micro-locale" de la diffraction des ondes. Il n'est pas question ici d'étudier cette méthode; par conséquent, il n'y a aucune démonstration.

Définition 2.2 *On dira d'un obstacle borné Θ qu'il est non-captif si, pour tout $R > 0$, il existe un temps τ_R tel que tous les rayons brisés de l'optique géométrique partant d'un point de $\Omega_R = \Omega \cap B(0; R)$ soient sortis de Ω_R au bout de τ_R .*

Sinon, on dit que Θ est captif (Ikawa[12]).

(voir figure 1)

Théorème 2.5 (T.G1 :localisation)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 3 \text{ impair})$, un ouvert connexe non borné, de bord $\delta\Omega = \Gamma : C^\infty$ compact. On suppose $\Theta = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ non captif (un cas suffisant: Θ convexe).

Alors toute résonance "D" ω vérifie:

$$|\Im(\omega)| \geq a + b \log |\Re(\omega)| \quad a, b > 0$$

Si, en plus, Γ est analytique, alors:

$$|\Im(\omega)| \geq a + b |\Re(\omega)|^{1/3} \quad a, b > 0$$

Théorème 2.6 (T.G2 :optimalité)

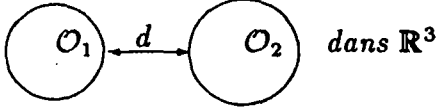
Supposons Γ strictement convexe, et telle qu'il existe une géodésique fermée $\gamma \subset \Gamma$, non dégénérée, de longueur T , telle que T ne soit longueur d'aucune géodésique fermée de Γ .

Alors $\forall \epsilon > 0$, il y a une infinité de résonances ("D") vérifiant:

$$|\Im(\omega)| \leq (c\gamma + \epsilon)|\omega|^{1/3}$$

Théorème 2.7 (T.G3 :cas captif)

On considère $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$ deux convexes (voir schéma)



Les pseudo-pôles sont définis par :

$$\bar{\mu}_j = -ic + \frac{\pi}{d}j$$

Il existe des résonances μ_j centrées sur les pseudo-pôles:

$$|\bar{\mu}_j - \mu_j| \leq \frac{c}{\sqrt{j}} \quad \forall j \text{ assez grand}$$

Remarque: c dépend des courbures de surface en M_1 et M_2 .
Ces résonances sont représentées par des croix, figure 1.

Références : T.G1 et T.G2 : voir Bardos,Lebeau,Rauch[4] et Bardos,Guillot,Ralston[5]
T.G3 : Ikawa[13].

Théorème 2.8 (T.G4 :Melrose et Sjöstrand)

Si Θ est un obstacle régulier non-captif contenu dans la boule $B : |X| < R$, et si, pour simplifier, les pôles de S sont simples, alors pour f à support dans B :

$$\hat{U}(t)f = \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_j e^{-i\mu_j t} + o(e^{(\Im\mu_n + \epsilon)t}) \text{ quand } (t \rightarrow +\infty)$$

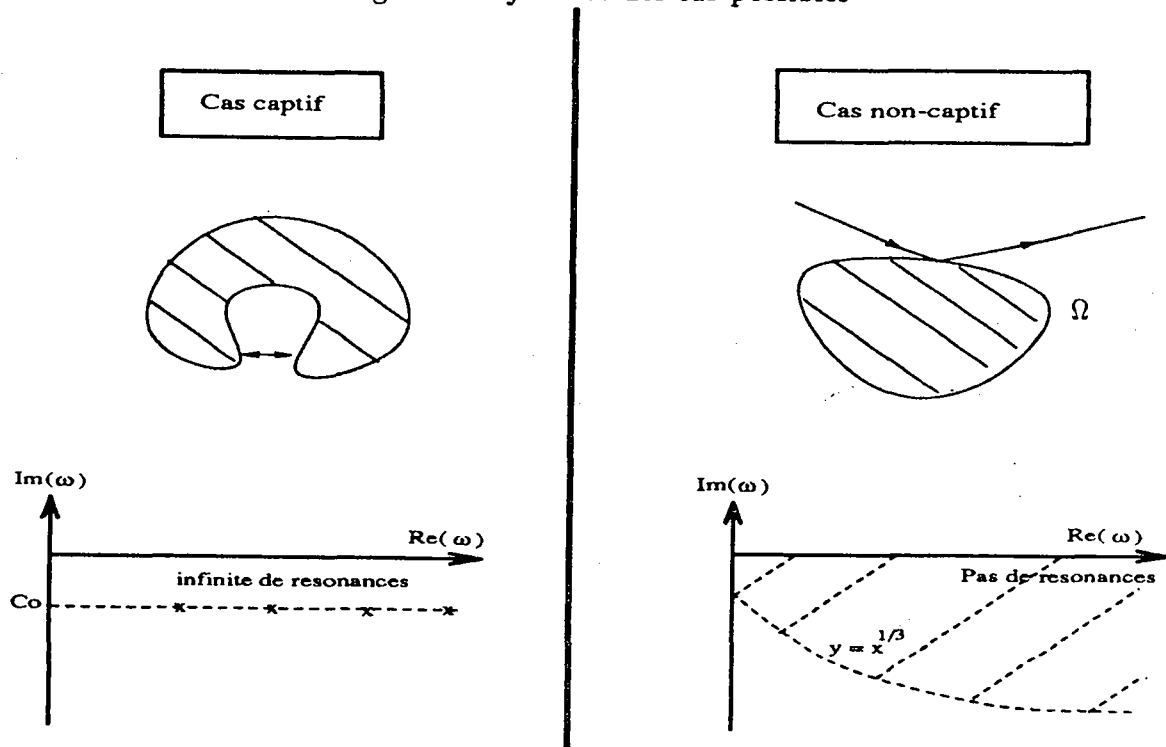
$\hat{U}(t)f$ étant la restriction à B de la solution de l'équation des ondes, de donnée initiale f . Les μ_j sont les pôles de S , rangés selon l'ordre:

$$0 > \Im\mu_1 > \dots > \Im\mu_j > \dots$$

Φ_j est le mode dégénéré associé à μ_j .

Remarque: cette formule, d'un intérêt essentiel pour le concept de résonance (comparer avec ce que donne le problème "intérieur" !) fournit une méthode de calcul numérique de celles-ci, dite de Prony, étudiée par Wei, Majda, Strauss[27].

Figure 1 : Synthèse des cas possibles



2.2 Exemple : le cas du cercle en dimension 2

2.2.1 Résolution du problème

Soit :

$$\Theta = \{x \in \mathbb{R}^2, |x| \leq a, a > 0\}$$

Pour résoudre \mathcal{P} , on décompose $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$ dans la base $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($\theta \in [0; 2\pi]$) :

$$g(\theta) = \sum_n g_n e^{in\theta}$$

La solution de \mathcal{P} s'écrit alors (voir Nédélec[19] par exemple)

$$u(r, \theta) = \sum_n g_n \frac{H_n^{(1)}(\omega r)}{\omega H_n^{(1)}(\omega a)} e^{in\theta}$$

donc :

$$S(\omega).g(\theta) = \sum_n g_n \frac{H_n^{(1)}(\omega a)}{\omega H_n^{(1)}(\omega a)} e^{in\theta}$$

Ainsi les résonances "N" du disque sont les zéros des $H_n^{(1)}(\omega a)'$, tandis que les résonances "D" sont les zéros des $H_n^{(1)}(\omega a)$.

2.2.2 Détermination de quelques résonances

Abramowitz-Segun[1]³ donne la formule suivante:

$$H_n(n + zn^{\frac{1}{3}}) \stackrel{n \rightarrow +\infty}{\simeq} \frac{2^{\frac{1}{3}}}{n} \underbrace{[Ai(-2^{\frac{1}{3}}z) - iBi(-2^{\frac{1}{3}}z)]}_{\frac{e^{i\pi/3}}{2} Ai(2^{\frac{1}{3}}e^{i\pi/3}z)} (1 + O(n^{-\frac{2}{3}}))$$

Soit x_0 un zéro de Ai ; alors

$$Ai(2^{\frac{1}{3}}e^{i\pi/3}z_0) = 0$$

pour

$$z_0 = (2^{\frac{1}{3}}e^{i\pi/3})^{-1}x_0$$

et il y aura une suite z_n convergeant vers z_0 (quand $n \rightarrow \infty$) telle que $H_n(n + z_n n^{\frac{1}{3}}) = 0$
Une suite de résonances "D" du disque ($a = 1$) est donc telle que:

$$\omega_n = n + z_n n^{\frac{1}{3}}$$

par conséquent:

$$\begin{aligned} \Re(\omega_n) &\stackrel{n \rightarrow +\infty}{\simeq} n \\ \Im(\omega_n) &\stackrel{n \rightarrow +\infty}{\simeq} -c[\Re(\omega_n)]^{1/3} \end{aligned}$$

Ce qui correspond avec le théorème général (T.G1 et T.G2), cas non-captif, mais ici en dimension 2.

³voir aussi Heyman et Felsen[10]

2.3 Etude de la fissure ouverte

2.3.1 Notations

Nous reprenons la plupart des éléments du travail réalisé dans Bamberger[3]

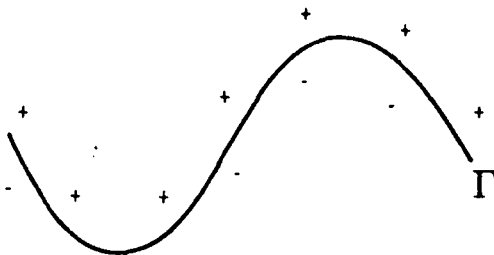


Figure 2 : Fissure plane

$+$ (respect: $-$) désigne ce qui est à la limite "supérieure" (respect: inférieure) de Γ . Nous nous intéresserons à des ondes répondant à la condition N:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{\Gamma} = g \in V'_o \quad \text{où } V_o = H^{1/2}_o(\Gamma)$$

Cette condition suppose implicitement :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\Gamma} = 0$$

$[q]$ signifiant le saut $(q_-) - (q_+)$ de la quantité q à travers Γ .

Remarques:

- Le problème avec condition D, donc supposant $[u] = 0$ est noté en annexe.
- Nous poserons généralement: $\phi = [u]$ qui est la donnée (ou l'inconnue) principale.

Soit

$$\mathcal{P}_N \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u - \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{\Gamma} = g & \in V'_o \\ u \in H^1(\Omega) \end{array} \right.$$

et aussi :

$$\mathcal{P}_D \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u - \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\Gamma} = 0 & \text{dans } V'_o \\ [u] = \phi & \in V_o \\ u \in H^1(\Omega) \end{array} \right.$$

2.3.2 Définition des résonances

Théorème 2.9 Lorsque $\omega \in \mathbb{C}_+$, les problèmes \mathcal{P}_D et \mathcal{P}_N ont chacun une solution unique, notée respectivement $u_D(\omega, \phi)$ et $u_N(\omega, g)$. De plus, ces solutions sont prolongeables dans $H_{loc}^1(\Omega)$ quand ω devient réel.

Démonstration:

Pour la deuxième proposition, nous pouvons considérer que c'est un cas particulier du théorème d'absorption limite, appliqué à une fissure. Quant à la première, nous savons que la coercivité de b (voir théorème 2.1 et la formulation qui suit) dans $(H^1(\Omega))^2$ implique existence et unicité de $u_N(\omega, g)$; $u_D(\omega, g)$ est donnée par la formule suivante:

$$u_D(\omega, \phi)(\vec{x}) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_{\Gamma}}(\omega, |\vec{x} - \vec{\sigma}(t)|) \phi(t) d\sigma(t)$$

L'unicité s'obtient en considérant que si $\phi = 0$, alors $b(u, v) = 0$ pour tout v dans $H^1(\Omega)$, et donc $u = 0$.

Théorème 2.10 La formulation variationnelle de \mathcal{P}_N est:

$$b(u, v) \equiv \int_{\Omega} [\nabla u \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}] d\Omega = \int_{\Gamma} g[\bar{v}] d\Gamma$$

Soit l'opérateur

$$T(\omega) : \phi \in V_o \longmapsto \left(\frac{\partial u_D(\omega, \phi)}{\partial n} \right)_{\Gamma} \in V_o'$$

T est caractérisé par :

$$\forall \phi, \psi \in H_o^1(\Gamma)$$

$$(1) \quad \langle T(\omega)\phi; \psi \rangle = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} H_o^{(1)}(\omega|x-y|) \left[\frac{d\phi}{d\sigma_x}(x) \frac{d\bar{\psi}}{d\sigma_y}(y) - \omega^2 n(x) \cdot n(y) \phi(x) \bar{\psi}(y) \right] d\sigma_x d\sigma_y$$

où $n(x)$ est la normale à Γ au point x .

Démonstration:

Tout ceci est fait dans Bamberger[3]. La dernière formule est classique, et définit bien $T(\omega)$, puisque $H_o^1(\Gamma)$ est dense dans $H_{\partial\Omega}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Nous allons cependant détailler les calculs pour le cas d'une fissure rectiligne; Γ est alors un segment de \mathbb{R} plongé dans \mathbb{R}^2 :

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$$

\hat{q} désignera la transformée de Fourier de q selon Ox , q étant prolongée par 0 au-delà de Γ :

$$\hat{q}(\xi) = \int_{\Gamma \text{ ou } \mathbb{R}} e^{-i\xi x} q(x) dx$$

L'équation

$$-\Delta u - \omega^2 u = 0 \text{ dans } \Omega$$

devient pour $y \neq 0$:

$$-\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} + (\xi^2 - \omega^2) \hat{u} = 0$$

La condition $u \in H^1(\Omega)$ mène alors à :

$$\hat{u}(\xi, y) = -\frac{1}{2} \text{Sign}(y) \hat{\phi}(\xi) e^{-\nu|y|}$$

avec

$$\nu = \sqrt{\xi^2 - \omega^2}, \Re(\nu) > 0 (\omega \in \mathbb{C}_+)$$

D'où l'on tire:

$$\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial n}\right)(\xi, 0) = \frac{\nu}{2} \hat{\phi}(\xi)$$

$T(\omega)\phi$ est caractérisé par :

$$\begin{aligned} \langle T(\omega)\phi; \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial n}\right)(\xi, 0) [\bar{\psi}] d\xi \quad \text{où } v \text{ est solution de } \{\mathcal{P}_D; \psi\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\xi^2 - \omega^2} \hat{\phi}(\xi) \bar{\psi}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\sqrt{\xi^2 - \omega^2} = \frac{\xi^2}{\sqrt{\xi^2 - \omega^2}} - \frac{\omega^2}{\sqrt{\xi^2 - \omega^2}}$$

et

$$(\xi^2 - \omega^2)^{-\frac{1}{2}} \xleftrightarrow{TF} \frac{i}{2} H_0^{(1)}(\omega|x|)$$

on obtient la formule (1) simplifiée :

$$\langle T(\omega)\phi; \psi \rangle = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(\omega|x-y|) [\phi'(x) \bar{\psi}'(y) - \omega^2 \phi(x) \bar{\psi}(y)] dx dy \bullet$$

Prolongement de T : La fonction $H_0^{(1)}$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus (-i\mathbb{R}_+)$, ce qui permet le prolongement holomorphe de $T(\omega)$ à

$$\mathbb{C}_{-+} \cup \mathbb{R}_+^* = \{\omega \in \mathbb{C}, \Im(\omega) \leq 0, \Re(\omega) > 0\}$$

Nous nous sommes arbitrairement restreints à $\Re(\omega) > 0$ pour simplifier, mais il est permis de prolonger analytiquement au-delà de la coupure, comme avec la fonction $\log(z)$ lorsque $\arg(z) \geq \pi$.

La singularité du noyau dans (1), est mise en évidence par $T_o = T(0)$, défini par:

$$\langle T_o \phi; \psi \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \log(|x-y|) d\phi(x) d\bar{\psi}(y)$$

$D(T_0) = V_0$ et $K(\omega) \equiv T(\omega) - T_0$ est T_0 -compact au sens de Kato [15] ⁴ (il agit en fait continument de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$); donc $D(T(\omega)) = V_0$. Cette décomposition de T est à la base de toutes ses propriétés. Nous pouvons maintenant définir les résonances grâce au

Théorème 2.11 $(T(\omega))_{\omega \in \mathbb{C}_+}$ est une famille analytique d'isomorphismes de V_0 dans V'_0 , qui se prolonge à $\mathbb{C} \setminus (-i\mathbb{R}_+)$ **analytiquement** en une famille d'opérateurs, inversibles sauf lorsque ω est l'un des points $(\omega_j)_{j \in J}$ isolés dans \mathbb{C}_- , appelés pôles de résonance de $S = T^{-1}$, auquel cas 0 est valeur propre de multiplicité finie de $T(\omega)$. On dit que $\{S(\omega)\}_{\omega \in \mathbb{C} \setminus (-i\mathbb{R}_+)}$ est méromorphe.

Démonstration:

D'après les remarques précédentes sur la décomposition de T , nous sommes placés exactement dans les conditions du théorème énoncé par Steinberg [22]: $T^{-1}(\omega)$ est donc méromorphe dans $\mathbb{C} \setminus (-i\mathbb{R}_+)$. De plus, ces pôles ne sont pas réels, en raison du théorème d'absorption limite, ce que l'on peut voir directement pour la fissure rectiligne:

$$\omega \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \Re(\langle T(\omega)\phi; \phi \rangle) = \frac{1}{2} \int_{|\xi| > \omega} \sqrt{\xi^2 - \omega^2} |\hat{\phi}|^2(\xi) d\xi \geq 0$$

donc $T(\omega)\phi = 0$ ssi $\phi = 0$. Remarquons d'autre part que le seul point d'accumulation des résonances est l'infini, compte tenu que seul zéro pourrait l'être aussi, mais que le prolongement continu de T à T_0 inversible l'en empêche. Cette propriété est encore vraie pour les résonances "D", quoiqu'on n'ait plus une démonstration comparable (voir l'annexe 5.6).

2.3.3 Autres propriétés de T

Les propriétés principales de T_0 sont à voir dans l'Annexe. Nous allons nous référer ici à Kato [15] :

- $T(\omega)$ est un opérateur semi-Fredholm (définition en Annexe 5.1) à résolvante compacte.

Démonstration:

Il est fermé d'après sa décomposition par T_0 et le paragraphe IV§6.8 (Kato).

Il est semi-Fredholm d'après le théorème 5.26 IV§5.3. Son spectre est donc réduit à l'ensemble de ses valeurs propres.

Si $z \notin \mathbb{R}$, la résolvante $R(z, T_0)$ existe et (Weidmann [28]):

$$\|R(z, T_0)\| \leq |\Im(z)|^{-1}$$

Donc lorsque $|\Im(z)|$ est assez grand, la condition donnée au théorème 3.17, ChapIV.6 (Kato [15]) est vérifiée, impliquant que $R(z, T(\omega))$ existe (ω étant fixé) et que T est à résolvante compacte (comme T_0).

⁴Les opérateurs intervenant sont considérés (non bornés) de V'_0 dans lui-même.

Conséquence immédiate: Les valeurs propres de T sont isolées (alors que le spectre de $-\Delta$ est continu !).

- On obtient directement une caractérisation de $T' = \frac{dT}{d\omega}$ en dérivant suivant ω dans (1). L'expression obtenue fait apparaître le noyau comme combinaison de fonctions de Hankel. Il en résulte que numériquement, le coût de calcul de $T'(\omega)$ passe dans celui de $T(\omega)$.

2.4 Etude générale du problème numérique

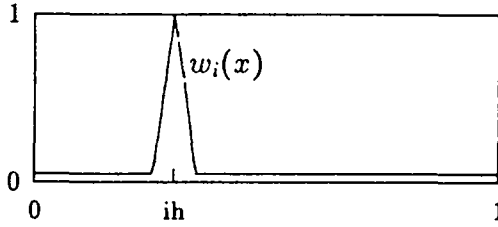
Dans cette section, nous posons le problème numérique, nous démontrons l'existence de résonances numériques engendrées par celui-ci, puis leur convergence vers les résonances (dites "exactes"). Enfin, nous proposons un algorithme pour leur recherche dans le plan complexe, de type Newton.

2.4.1 Définition de l'opérateur discret et des résonances numériques

Nous prenons les éléments \mathcal{P}_1 classiques pour approcher l'opérateur T : nous construisons donc des sous-espaces V_h inclus dans $H_0^1(\Gamma)$, de dimension finie N , formés de fonctions affines par morceaux et continues. Soit (w_i) la base de V_h des fonctions "chapeau". Par exemple, pour la fissure rectiligne $[0;1]$:

$$\begin{aligned} w_i(x) &= \frac{x}{h} - (i-1) & x \in [(i-1)h, ih] \\ &= -\frac{x}{h} + (i+1) & x \in [ih, (i+1)h] \\ &= 0 & \text{ailleurs} \end{aligned}$$

et $i = 1 \dots N$
 $h = \frac{1}{N+1} = \frac{1}{2M}$



Posons $A_{h,i,j} = b(\omega, w_i, w_j)$ et $B_{h,i,j} = \int_{\Gamma} w_i(x)w_j(x)dx$. B_h est une matrice de poids tridiagonale; pour une fissure discrétisée régulièrement, sa diagonale dominante est $2h/3$ et les deux autres $h/6$. Elle est inversible. Nous définissons donc

$$T_h(\omega) = B_h^{-1} A_h$$

qui vérifie: $\forall u_h, v_h \in V_h$,

$$\langle T_h(\omega)u_h; v_h \rangle = b(\omega, u_h, v_h)$$

Définition 2.3 Les résonances numériques sont les zéros de la fonction analytique $f_h(\omega) = \det(A_h(\omega))$, définie sur $\mathbb{C} \setminus (-i\mathbb{R}_+)$.

2.4.2 Convergence de l'opérateur discret et des résonances numériques

Théorème 2.12 Si $\Im(\omega) \geq 0$, alors f_h ne s'annule pas.

Démonstration:

Quand $\Im(\omega) > 0$, la coercivité de b implique: $\forall \phi_h \in V_h$,

$$\Im(b(\omega, \phi_h, \phi_h)) \geq c \|\phi_h\|_{V_0}^2$$

Donc si $T_h \phi_h = 0$, alors $\phi_h = 0$. Le noyau de A_h est réduit à $\{0\}$ et $f_h \neq 0$.
Si ω est réel, nous avons:

$$\Im(\langle T_h \phi_h; \phi_h \rangle) = \int_0^{2\pi} |A(\beta)|^2 d\beta$$

où $A(\beta)$ est l'amplitude de diffusion (voir Annexe 5.8.1), caractérisant l'onde u de saut ϕ_h à travers Γ . Or:

$$T_h \phi_h = 0 \Rightarrow \forall \beta, A = 0 \Rightarrow \phi_h = 0 \text{ et } \phi_h = 0$$

La conclusion est donc inchangée dans ce cas.

Corollaire 2.1 Les résonances numériques sont des points isolés de \mathbb{C}_-

Démonstration:

Puisque f_h est une fonction analytique non nulle en dehors de \mathbb{C}_- , ses zéros sont donc des points isolés de \mathbb{C}_- d'ordre fini.

Pour utiliser la théorie des opérateurs bornés sur un Hilbert $V (= V_0)$, nous posons:

$$\tilde{T}(\omega) = T_0^{-1}T(\omega) = I + \tilde{K}(\omega) \text{ et } \tilde{T}_h(\omega) = T_0^{-1}T_h(\omega)$$

Nous considérons, pour $\rho > 0$ donné, le cercle $\mathcal{C}_\rho = \{z \in \mathbb{C}; |z| = \rho\}$, le disque ouvert \mathcal{D}_ρ lui correspondant, et un élément z de \mathcal{C}_ρ ou de \mathcal{D}_ρ . Nous poserons lorsqu'il existe:

$$\tilde{S}(z, \omega) = (z - \tilde{T}(\omega))^{-1}$$

Nous noterons $(u|v)_V$ le produit scalaire défini par $\langle T_0 u; v \rangle$; la norme associée $|u|_V$ est équivalente à $\|u\|_V = (\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|) |\hat{u}|^2 d\xi)^{1/2}$ dans le cas de la fissure rectiligne (voir Annexe).

Nous allons maintenant utiliser les résultats énoncés dans Lenoir [17](chap.V). Soit

$$\beta(z, \omega) = \inf_{u \in V} \sup_{v \in V} \frac{((z - \tilde{T}(\omega))u|v)_V}{|u|_V |v|_V}$$

$$\beta_h(z, \omega) = \inf_{u_h \in V_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{((z - \tilde{T}_h(\omega))u_h|v_h)_V}{|u_h|_V |v_h|_V}$$

Théorème 2.13 $(z, \omega) \rightarrow \beta$ et β_h sont continues, et β_h l'est uniformément en h .

Démonstration:

La famille $\{T(\omega)\}_{\omega \in \mathbb{C} \setminus (-i\mathbb{R}_+)}$ est analytique, donc $\|\tilde{T}(\omega) - \tilde{T}(\omega_o)\| \leq C_\delta |\omega - \omega_o|$ pour tout $\omega \in B_\delta \equiv B(\omega_o, \delta)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{((z - \tilde{T}(\omega))u|v)_V}{|v|_V} &\geq \frac{((z_o - \tilde{T}(\omega_o))u|v)_V}{|v|_V} - |z - z_o| - C_\delta |\omega - \omega_o| \\ \Rightarrow \sup_{v \in V} \dots &\geq \sup_{v \in V} \dots - |z - z_o| - C_\delta |\omega - \omega_o| \\ &\Rightarrow \beta(z, \omega) \geq \beta(z_o, \omega_o) - |z - z_o| - C_\delta |\omega - \omega_o| \end{aligned}$$

On peut échanger (z, ω) et (z_o, ω_o) , donc:

$$|\beta(z, \omega) - \beta(z_o, \omega_o)| \leq |z - z_o| + C_\delta |\omega - \omega_o|$$

Nous avons aussi parallèlement l'autre formule:

$$|\beta_h(z, \omega) - \beta_h(z_o, \omega_o)| \leq |z - z_o| + C_\delta |\omega - \omega_o|$$

en se restreignant à $u, v \in V_h$.

Théorème 2.14 Si ω_o n'est pas résonance exacte, alors $\exists \rho > 0$, $\exists \delta > 0$, $\exists h_o > 0$ tels que \mathcal{D}_ρ ne contienne aucune valeur propre de $\tilde{T}(\omega)$ ou de $\tilde{T}_h(\omega)$ pour tout $h \leq h_o$ et $\omega \in B_\delta$.

Lemme 1 Soit $a_h(u_h, v_h) = ((z - \tilde{T}(\omega))u_h|v_h)$ pour $u_h, v_h \in V_h$; Si ω_o n'est pas résonance, alors $\exists \rho > 0$, $\exists \delta > 0$, $\exists h_o > 0$ tels que la famille a_h soit uniformément stable en $\omega \in B_\delta$, $z \in \bar{\mathcal{D}}_\rho$ et $0 < h < h_o$.

Démonstration:

Nous appliquons le théorème P.V.1).3) de Aubin [2] cité par Lenoir [17]:

$A = \tilde{T}(\omega_o)$ est un automorphisme de V de la forme coercif + compact. Il en résulte la stabilité de la famille a_h pour $h < h_o$: $\beta_h(0, \omega_o) \geq \tilde{\beta} > 0$; la continuité de β_h selon (z, ω) , uniforme en h , vue au théorème 2.13 montre que $\tilde{\beta}$ peut être choisi indépendant de $z \in \bar{\mathcal{D}}_\rho$ et $\omega \in B_\delta$, de façon que $\beta_h(z, \omega) \geq \tilde{\beta} > 0$ et aussi $\beta(z, \omega) \geq \tilde{\beta}$.

Démonstration du théorème 2.14:

La stabilité de a_h nous assure l'existence de l'opérateur $\tilde{S}_h(z, \omega)$ de V dans V_h tel que :

$$\forall u \in V, \forall v_h \in V_h : a_h(\tilde{S}_h(z, \omega)u, v_h) = (u|v_h)_V$$

c'est-à-dire que $z \in \bar{\mathcal{D}}_\rho$ n'est pas valeur propre de $\tilde{T}_h(\omega)$ (ni de $\tilde{T}(\omega)$ d'après le lemme), lorsque $0 < h < h_o$ et $\omega \in B_\delta$.

Corollaire 2.2 Soit D_o un compact de $\mathbb{C} \setminus (-i\mathbb{R}_+)$ ne contenant aucune résonance exacte. alors il existe $h(D_o) > 0$ tel que pour tout $0 < h < h(D_o)$, D_o ne contienne aucune résonance numérique.

Démonstration:

Nous appliquons le théorème précédent avec $z = 0$.

Nous avons donc démontré que toute suite bornée de résonances numériques ne peut que s'accumuler au voisinage d'une résonance exacte. Nous cherchons donc maintenant l'existence d'une telle suite au voisinage d'une résonance exacte.

Pour commencer, nous n'avons pas (à priori) la convergence en norme de \tilde{S}_h vers \tilde{S} . Cependant, il y a une propriété presque aussi forte:

Théorème 2.15 *Si ω_o est une résonance, alors il existe $\rho > 0$ arbitrairement petit et $\delta (= \delta(\rho)) > 0$ tels que pour tout ω dans B_δ :*

$$\sup_{u_h \in V_h} \frac{\|(\tilde{S}(z, \omega) - \tilde{S}_h(z, \omega))u_h\|_V}{\|u_h\|_V} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

la convergence étant uniforme en $z \in C_\rho$ et ω .

Démonstration:

Si ω_o est résonance, 0 sera la seule valeur propre de $\tilde{T}(\omega_o)$ dans une boule $\tilde{\mathcal{D}}_\rho$, $\rho > 0$ et aussi petit que l'on veut. Il existe alors $\delta(\rho) > 0$ tel que $\forall \omega \in B_\delta$, il n'y ait aucune valeur propre de $\tilde{T}(\omega)$ sur le cercle C_ρ (ceci provenant de la propriété de continuité de $\beta(z, \omega)$ au théorème 2.13). Les derniers résultats montrent qu'il en est de même pour l'opérateur discret $\tilde{T}_h(\omega)$: $\tilde{S}(z, \omega)$ et $\tilde{S}_h(z, \omega)$ sont donc bien définis lorsque $|z| = \rho$, $|\omega - \omega_o| \leq \delta(\rho)$ et $0 < h < h(\delta)$. Nous appliquons maintenant le théorème de Strang cité par Lenoir [17] (chap.V):

$$\|(\tilde{S}(z, \omega) - \tilde{S}_h(z, \omega))u_h\|_V \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|\tilde{S}(z, \omega)u - v_h\|$$

En fait, C ne dépend que de $\tilde{\beta}$ (donc de ρ et δ seuls) et de la norme de $z - \tilde{T}(\omega)$, majorée aussi par un $M(\rho, \delta)$.

Remarquons que cela ne permet que la convergence de \tilde{S}_h vers \tilde{S} point par point.

Posons

$$Q = \tilde{S}(z, \omega) - (z - 1)^{-1}I$$

Or

$$((z - 1)I - \tilde{K}(\omega))\tilde{S}(z, \omega) = I$$

donc : $Q = (z - 1)^{-1}\tilde{K}(\omega)\tilde{S}(z, \omega)$ est compact.

Soit $u \in V_h$; alors:

$$\tau(u) \equiv \inf_{v_h \in V_h} \|\tilde{S}(z, \omega)u - v_h\| = \inf_{v_h \in V_h} \|Q(z, \omega)u - v_h\|$$

Si une suite bornée $(u_h)_h$ de V telle que $u_h \in V_h$, alors $Q(z, \omega)u_h$ possède une sous-suite convergente dans V , et donc $\tau(u_h)$ tend vers 0 (à une sous-suite près) quand h tend vers 0.

Soit

$$\varepsilon_h(z, \omega) = \sup_{u_h \in V_h} \inf_{v_h \in V_h} \frac{\|\tilde{S}(z, \omega)u - v_h\|}{\|u_h\|_V}$$

Cette quantité tend vers 0 quand h tend vers 0; elle est en plus continue en (z, ω) , uniformément en $h < h(\rho)$ car $(z, \omega) \rightarrow \tilde{S}$ est continue. Donc sa borne supérieure $\varepsilon(h)$ lorsque $(z, \omega) \in \mathcal{C}_\rho \times B_\delta$ converge vers 0 quand h tend vers 0.

Autrement dit:

$$\sup_{(z, \omega) \in \mathcal{C}_\rho \times B_\delta} \sup_{u_h \in V_h} \inf_{v_h \in V_h} \frac{\|\tilde{S}(z, \omega)u - v_h\|}{\|u_h\|_V} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Posons

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\rho} \tilde{S}(z, \omega) dz$$

$$P_h(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\rho} \tilde{S}_h(z, \omega) dz$$

D'après les résultats de S.Steinberg [22] (voir aussi J.S.Howland [11]), P est la projection spectrale sur l'espace propre généralisé $E_o(\omega)$, selon la direction $E_1(\omega)$ et vérifiant les propriétés importantes suivantes:

- $V = E_o(\omega) \oplus E_1(\omega)$
- $\dim E_o(\omega) = m = \dim E_o(\omega_o)$, δ étant assez petit.
- $\tilde{T}(\omega)|_{E_o(\omega)}$ est nilpotente d'indice $\leq m$, et $\tilde{T}(\omega)|_{E_1(\omega)}$ est un automorphisme.

$P_h(\omega)$ est la projection sur E_h , somme directe des espaces propres généralisés associés aux valeurs propres dans \mathcal{D}_ρ de $\tilde{T}_h(\omega)$.

Faisons quelques rappels sur les notions d'ordre associé à une résonance pour le cas d'un opérateur A en dimension finie:

Définition 2.4 *L'ordre faible ν est l'ordre du zéro de $\det(A)$ en ω_o*

L'ordre n de la résonance est défini par l'expression de A^{-1} au voisinage de son pôle :

$$A^{-1}(\omega) = (\omega - \omega_o)^{-n} R(\omega)$$

où R est analytique, non nulle en ω_o (et inversible ailleurs).

Remarque:

- Howland([11]) montre que $n \leq \nu$ et que $n = 1$ si et seulement si ν est égal à la dimension du noyau de $A(\omega_o)$.

Nous allons voir dans ce qui suit que ν est aussi l'ordre faible des résonances numériques, mais que leur ordre de multiplicité est supérieur ou égal à n . Une partie de la démarche suivante est de se ramener au cas d'opérateurs en dimension finie, puis d'utiliser leurs propriétés d'analyticité.

Théorème 2.16 *La dimension de $E_h(\omega)$ est m pour h assez petit et $E_h(\omega)$ converge vers $E_o(\omega)$ uniformément en ω (dans la boule B_δ)*

Remarque: Comme tout se passe en dimension finie, tous les sens possibles donnés à cette convergence sont équivalents.

Démonstration:

P_h converge vers P point par point (ceci grâce au théorème de Strang); donc:

$$(2) \quad E_h \supset P_h(E_o) \xrightarrow{h \rightarrow 0} E_o$$

Si (u_h) est une suite de E_h , alors d'après le théorème 2.15:

$$(3) \quad \|(P_h - P)u_h\|_V \leq C \sup_{z \in \mathcal{C}_\rho} \|(\tilde{S} - \tilde{S}_h)u_h\| = o(\|u_h\|_V)$$

Si u_h est bornée, alors $u_h \rightharpoonup u$ dans V -faible, et $Pu_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} Pu \in E_o$.
Donc $u_h = P_h u_h \rightarrow Pu = u \in E_o$. En conséquence $E_h = P_h(E_h)$ a une sous-suite convergente vers un sous-espace de E_o ; le résultat (2) impose que c'est E_o lui-même.
Le fait que cette convergence soit uniforme en ω provient de ce que la quantité $\varepsilon(z, \omega)$ définie au théorème 2.15 est continue en (z, ω) uniformément en $h < h_\rho$. Remarquons aussi que:

$$P_h(E_o) = E_h \text{ et } P(E_h) = E_o$$

Posons

$$\tilde{f}_h(\omega) = \det(P_h(\omega)\tilde{T}_h(\omega))$$

$$\tilde{f}(\omega) = \det(P(\omega)\tilde{T}(\omega))$$

Ce sont des fonctions analytiques; ω_o est le seul zéro de \tilde{f} dans B_δ et son ordre ν est l'ordre faible. De même, les résonances numériques dans B_δ : $\omega_{i,h}$ ($i = 1 \dots k(h)$), sont les seuls zéros de \tilde{f}_h dans B_δ . L'ordre de multiplicité numérique n_h est la somme des multiplicités $n_{i,h}$ de ces pôles. De même, l'ordre faible numérique ν_h est la somme des ordres faibles $\nu_{i,h}$.

Théorème 2.17 *L'ordre faible numérique ν_h est ν pour h assez petit.*

Démonstration:

La convergence de T_h et T_h^{-1} restreints à E_h vers T et respectivement T^{-1} , (restreints à E_o), uniforme en ω dans B_δ et respectivement \mathcal{C}_δ (cercle de centre ω_o et de rayon δ) implique les propriétés suivantes sur f_h : f_h et f'_h sont analytiques et convergent (unif. en ω dans B) vers respectivement f et f' . D'autre part f_h^{-1} converge (unif. en $\omega \in \mathcal{C}_\delta$ vers f^{-1} ; il en est donc de même pour la convergence de $f'_h f_h^{-1}$ vers $f' f^{-1}$. Or

$$2\pi i \nu_h = \int_{\mathcal{C}_\delta} f'_h f_h^{-1}(\omega) d\omega \rightarrow \int_{\mathcal{C}_\delta} f' f^{-1}(\omega) d\omega = 2\pi i \nu$$

Théorème 2.18 $\tilde{T}(\omega)|_{E_o(\omega)}$ est semblable à $F(\omega)$ définie sur $E \equiv E_o(\omega_o)$; il en est de même numériquement pour $\tilde{T}_h(\omega)|_{E_h(\omega)}$ semblable à $F_h(\omega)$ définie sur $E_h(\omega_o)$.

Démonstration:

$$U(\omega) = P(\omega_o)P(\omega) + (I - P(\omega_o))(I - P(\omega))$$

transforme holomorphiquement $E_o(\omega)$ en E et $E_1(\omega)$ en $E_1(\omega_o)$. Nous avons alors:

$$F(\omega) = U(\omega)\tilde{T}(\omega)U^{-1}(\omega)$$

est analytique, inversible ssi $\omega \neq \omega_o$. Son inverse est méromorphe sur B et de pôle ω_o d'ordre n ($\leq \nu$). De même nous posons

$$U_h(\omega) = P_h(\omega_o)P_h(\omega) + (I - P_h(\omega_o))(I - P_h(\omega))$$

et

$$F_h(\omega) = U_h(\omega)\tilde{T}_h(\omega)U_h^{-1}(\omega)$$

$\tilde{T}_h|_{E(h)}$, U_h , F_h convergent uniformément en ω dans B vers respectivement \tilde{T} , U , F , c'est-à-dire, par exemple pour F_h , que si $u_h(\omega)$ est une suite de E_h convergente vers $u(\in E_o)$, alors $F_h u_h$ converge vers $F(\omega)u$ (uniformément en ω).

Théorème 2.19 *L'ordre de multiplicité numérique n_h est supérieur à n pour h assez petit, et reste majoré par l'ordre faible ν .*

Démonstration:

Il est clair que $n_h \leq \nu_h = \nu$; nous supposons donc que n_h converge vers un n' . Nous avons:

$$F^{-1}(\omega) = (\omega - \omega_o)^{-n} R(\omega)$$

$$F_h^{-1}(\omega) = \prod_{i=1}^{n_h} (\omega - \omega_{i,h})^{n_{i,h}} R_h(\omega)$$

R et R_h sont analytiques dans B_δ , et jamais identiquement nulles. La convergence uniforme sur \mathcal{C}_δ de F_h^{-1} vers F^{-1} implique celle de $R_h(\omega)$ vers $(\omega - \omega_o)^{n'-n} R(\omega)$.

L'analyticité de R et R_h étendent le domaine de convergence uniforme à D_ρ tout entier (c'est une propriété des suites convergentes de fonctions analytiques); en particulier nous avons nécessairement $n \leq n'$.

Remarque: Il n'y a pas toujours égalité entre $n_h = n'$ et n ; par exemple, prenons $z = \omega - \omega_o$ dans un voisinage de 0, $m = 2$ et la suite de matrices:

$$F_h(z) = \begin{pmatrix} z - h & 0 \\ h & z + h \end{pmatrix}$$

qui converge vers $F = zI$; or $n = 1$ puisque $F^{-1} = z^{-1}I$, $\nu = 2$, mais:

$$F^{-1}(z) = \begin{pmatrix} (z - h)^{-1} & 0 \\ -\frac{h}{z^2 - h^2} & (z + h)^{-1} \end{pmatrix}$$

donc $n_h = 2$ (et $\nu_h = 2$).

Cependant, si $T(\omega_o)$ est diagonalisable, alors n est l'ordre de la valeur propre de $T(\omega)$ qui converge le plus vite vers zéro quand $z = \omega - \omega_o \rightarrow 0$. Comme les valeurs propres de T_h tendent vers celles de T , n est donc le plus grand ordre donné par elles. Une étude détaillée du comportement de l'opérateur (similaire à T), dans le cas particulier où il est diagonalisable, est présentée dans la thèse de C. Hasard [9].

2.4.3 Algorithme de recherche des résonances

Etant connus une valeur propre λ de $T(\omega)$ opérateur symétrique et son mode associé ϕ (l'espace propre est supposé de dimension 1), nous pouvons connaître facilement sa dérivée $\lambda'(\omega)$ selon ω :

$$(\phi; \bar{\phi})\lambda'(\omega) = \langle T'(\omega)\phi; \bar{\phi} \rangle$$

$T'(\omega)$ est obtenu par : $\forall \phi, \psi \in V_o$

$$\langle T'(\omega)\phi; \psi \rangle = \frac{\partial b}{\partial \omega}(\omega, \phi, \psi)$$

L'opérateur discret s'obtient identiquement en restreignant à $\phi, \psi \in V_h$ (la dérivation de $T_h(\omega)$ est donc exacte). D'où l'écriture de l'algorithme de recherche des résonances: c'est la méthode de Newton, à savoir :

soit un choix d'une fréquence initiale ω_o ; la suite ω_n est alors définie par :

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{\lambda_h(\omega_i)}{\lambda'_h(\omega_i)}$$

Nous avons noté $\lambda_h(\omega)$ la plus petite valeur propre en module de $T_h(\omega)$; Lorsque la suite converge ($i \rightarrow \infty$), nous obtenons une résonance numérique. La détermination de ω_o est une question d'habitude, liée à l'estimation préalable (et au cours des calculs numériques) des résultats. Parfois, la grande régularité de la répartition des résonances permet un gain de temps considérable (l'exemple type étant la fissure rectiligne: voir section 2.5) et une assurance de la justesse des calculs.

Remarques:

- Pratiquement, $\lambda_h(\omega)$ est valeur propre de $A_h(\omega)$, ce qui correspond à une valeur propre de l'opérateur, multipliée par le pas de discrétisation.

- Nous n'avons pas utilisé de préconditionnement de la matrice A_h , au contraire de la démarche théorique de la section 2.4.2 où nous avons pris $T_o^{-1}T(\omega)$ (nous ignorons ceci dans le point-remarque suivant, supposant que notre analyse des valeurs propres est faite pour T et non plus pour $T_o^{-1}T$). Cela nous a semblé un avantage de simplicité d'écriture du programme, peut-être au détriment de sa robustesse. Il faut cependant tenir compte de ce dernier point lors de la recherche de résonances "D", car l'opérateur est alors compact et cela pose des problèmes numériques: voir annexe 5.6.

- Que λ dépende analytiquement de ω n'est pas toujours vrai, en particulier si ω est un point exceptionnel (au sens de Kato [15]) pour λ (et nécessairement $m > 1$). Ce phénomène est apparu plus tard pour des fissures autres que celles rectilignes ou en arc de cercle; il oblige à considérer comme fonction analytique non plus une valeur propre, mais le produit des k plus petites valeurs propres (k est en plus à déterminer), celles qui vont s'annuler ensemble au pôle.

2.5 La fissure rectiligne: Calculs, Résultats, Conjectures

Nous remarquons que pour notre étude, cet exemple est le plus simple. Il s'agit principalement de chercher des résonances de grande partie réelle, pour voir comment se comporte alors leur partie imaginaire. Nous prenons $\Gamma = [0, 1] \times \{0\}$

$$V_h = Vect(w_1, \dots, w_N) \subset H_o^1(\Gamma)$$

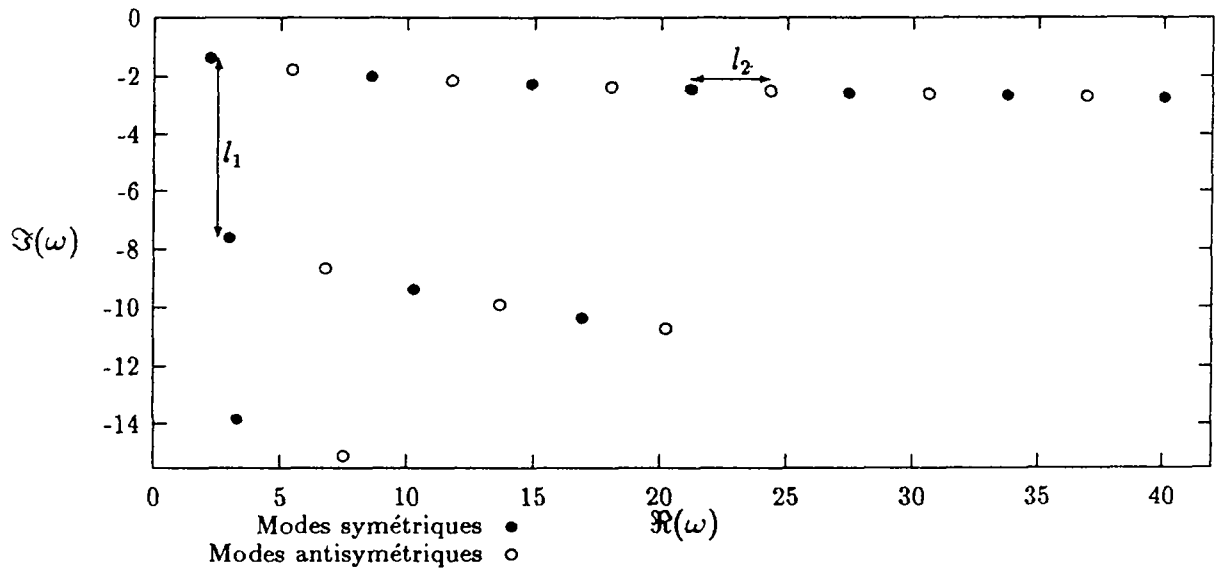
où les w_i sont les fonctions "chapeau" sur $[0, 1]$ (voir le schéma des pages précédentes). Ici, la dérivée de T à est donnée par la formule simple suivante:

$$\langle T'(\omega)\phi; \psi \rangle = -\frac{i\omega}{4} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(\omega|x-y|)\phi(x)\bar{\psi}(y)dxdy$$

Nota: Les résultats ne montrent pas toutes les résonances dans un domaine de fréquences donné. Cependant, on pourra toujours en voir quelques-unes "successives" (en partie réelle), permettant ainsi de pouvoir extrapoler celles manquantes.

La figure 3 montre une répartition très intéressante des résonances

Figure 3 : Résonances de la fissure rectiligne acoustique



$l_1 = 6.24$, soit environ 2π .

$l_2 = 3.1$, soit environ π .

Le programme numérique donne aussi la résonance :

$$\Re(\omega) = 102.7 ; \Im(\omega) = -3.203$$

Les résonances intermédiaires n'ayant pas été calculées. En effet, celles obtenues ci-dessus (et le plus proche de l'axe réel) vérifient avec une bonne approximation :

$$\Re(\omega) = a + n\pi$$

$$\Im(\omega) = b + c * \log(\Re(\omega))$$

avec n : entier, $a = 2.23$, $b = 0.944$ et $c = 0.49$

Nous faisons la conjecture que de telles relations donnent exactement le comportement de ces résonances quand $n \rightarrow \infty$. De plus, il y a de bonnes chances que la valeur de c soit $\frac{1}{2}$.

Tout ceci est à rapprocher du théorème T.G1 (valable en Dim 3), car ici Γ est convexe non analytique (à cause des singularités aux bords de la fissure).

Remarque: Ces conjectures sont justifiables, sans pour autant qu'il y ait déjà une démonstration rigoureuse, par la théorie des rayons; les résonances correspondraient asymptotiquement (i.e: $\Re(\omega) \rightarrow \infty$) aux zéros de l'équation:

$$\frac{e^{i\omega}}{\sqrt{\omega}} = 1$$

le membre de gauche représentant un coefficient de réflexion au bord de la fissure d'une onde se propageant le long de la fissure. On peut alors vérifier que $-c$ est la puissance de ω de ce coefficient.

La figure 4 présente quelques modes propres. Nous pouvons vérifier numériquement qu'ils sont en \sqrt{x} , x étant la distance au bord de la fissure. Ce résultat était attendu, par l'analyse du problème en coordonnées elliptiques (cf. Annexe 5.5).

Une amélioration possible de la méthode numérique est de tenir compte de la singularité des modes propres aux bords de $\Gamma = [0; 1]$, en introduisant par exemple un terme $\sqrt{x(1-x)}$ dans la construction des vecteurs de V_N , ou bien en raffinant le maillage en 0 et 1. Mais cela complique sérieusement l'écriture du programme, et fait perdre la structure Toeplitz de la matrice A_h . Nous avons ici des résultats sûrs, permettant la vérification par la suite de programmes plus sophistiqués et adéquats à des fissures quelconques.

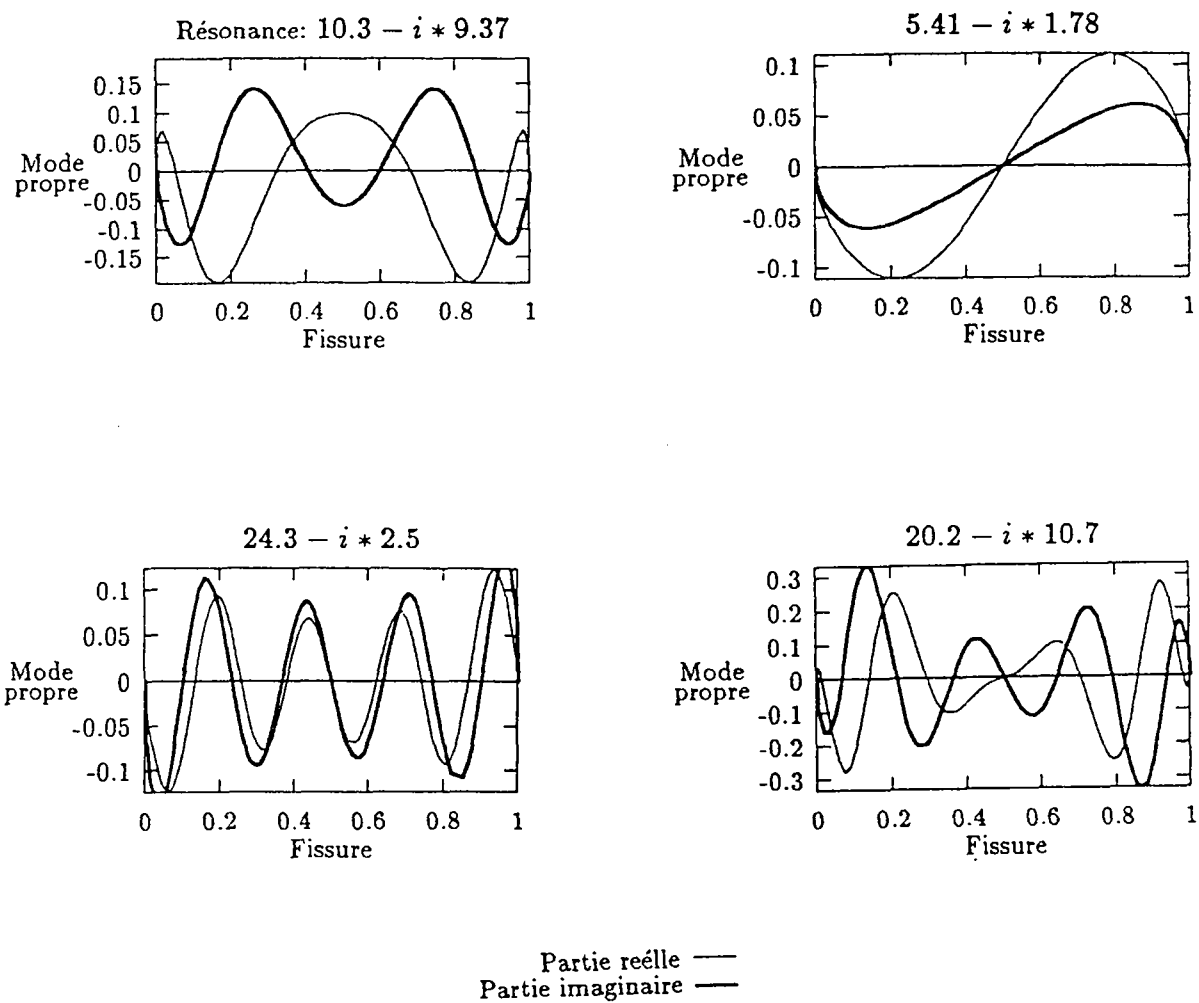
La méthode de l'intégrale de Cauchy :

$$n_h = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(\omega_o, \rho)} \lambda_h(\omega) d\omega$$

permet de s'assurer de l'existence d'une résonance numérique (ou exacte) dans $B(\omega_o, \rho)$ à condition de fixer ρ et diminuer h , quoiqu'on ignore vraiment à partir de quel h on peut être sûr de tout; de plus le nombre de points de discrétisation élevé rend la méthode coûteuse. Elle a été cependant mise au point, et confirme l'existence de (quelques) résonances.

Nous présentons en Annexe 5.8.1 une étude détaillée de la section efficace en fonction de fréquences réelles, avec le commentaire des résultats numériques.

Figure 4 : Quelques modes propres



2.6 Passage à la diffraction par un ouvert d'intérieur non vide

Nous notons Θ cet ouvert. Sa frontière est Γ que l'on considère comme une fissure dont les bouts sont joints; $H_{oo}^{1/2}(\Gamma)$ disparaît de nos préoccupations et laisse place à $H^{1/2}(\Gamma)$. Le saut $[q]$ à travers Γ de la fonction q devient la différence $q_i - q_e$ des limites sur Γ des valeurs de q à l'intérieur (Θ) et à l'extérieur (Ω). A cette modification près, l'opérateur $T(\omega)$ a une définition formellement inchangée:

$$(1) \quad \forall \phi, \psi \in H^{1/2}(\Gamma) \quad \langle T(\omega)\phi; \psi \rangle = b(\omega, \phi, \psi)$$

T lie problèmes de Helmholtz intérieur et extérieur, puisqu'à ϕ donnée sur le bord il fait correspondre:

$$g = \frac{\partial u}{\partial N}$$

où u est l'unique solution dans $H^1(\Theta \cup \Omega)$ (si $\omega \in \mathbb{C}_+$) de:

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u - \omega^2 u = 0 \text{ dans } \Theta \cup \Omega \\ [u] = \phi \in H^{1/2}(\Gamma) \\ [\frac{\partial u}{\partial N}] = 0 \end{array} \right.$$

T s'étend à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ analytiquement, et T^{-1} s'y étend méromorphiquement (toujours par le théorème de Steinberg). Nous avons donc le

Théorème 2.20 *0 est valeur propre de $T(\omega)$ ssi ω est une résonance "N" intérieure (et donc ω est réel) ou une résonance "N" extérieure (donc dans \mathbb{C}_-).*

En conséquence, il n'y a rien de fondamentalement différent entre les deux cas fissure ouverte ou obstacle plein, excepté que dans l'un, nous recueillons en plus par la formulation variationnelle (1) les résonances intérieures. Le problème numérique garde alors encore les mêmes caractéristiques de convergence (voir section 2.4). Si nous voulons nous limiter à calculer l'une ou l'autre sorte de résonances ("int" ou "ext") il peut y avoir des ennuis lorsqu'elles ne se séparent pas bien, c'est-à-dire quand des résonances "ext" se rapprochent de l'axe réel. Autrement dit, les résonances extérieures (et purement complexes) peuvent très bien nuire à l'étude du problème intérieur de la même façon que les fréquences propres intérieures interagissent avec le problème extérieur, lorsque la résolution provient des équations intégrales.

3 Ondes élastiques

Nous ne refaisons pas ici une étude détaillée des équations de l'élasticité (linéaire, isotrope); ce qui suit est donc surtout une étude mathématique abstraite, et les grandeurs physiques seront éliminées dans la limite de la compréhension (par exemple la densité du milieu ambiant est $\rho = 1$). De plus, toute la présentation faite dans le chapitre précédent pour définir les résonances, le problème numérique et sa convergence, reste formellement valable, puisqu'il s'agit essentiellement de manipuler une famille analytique (en ω) d'opérateurs de type coercif+compact, inversibles sur \mathbb{C}_+ et aussi sur \mathbb{R}_+^* en raison une fois de plus de la validité du théorème d'absorption limite (se référer en particulier à DERMENJIAN-GUILLOT [?]). C'est pourquoi nous énoncerons des propositions sans démonstration pour la plupart, lorsque l'analogie avec les ondes acoustiques est triviale.

3.1 Présentation générale

Les notations qui suivent sont classiques, à savoir:

λ et μ : constantes de Lamé

ρ = densité dans Ω ($=1$ pour simplifier)

$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$: tenseur des déformations

$\sigma(u) = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$: tenseur des contraintes. L'onde est

$$u = (u_1, u_2) \in V = (H_{loc}^1(\Omega; \Delta))^2$$

Comme il n'y a pas vraiment de différence formelle entre problème avec fissure ou avec obstacle d'intérieur non vide, nous poserons:

$$V_o = (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^2 \text{ si } \Gamma \text{ est fermée (1}^{er} \text{ cas)}$$

$$V_o = (H_{oo}^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^2 \text{ si } \Gamma \text{ est une fissure ouverte (2}^{eme} \text{ cas) .}$$

et

$$\phi = (u)_{\Gamma} \quad (1^{er} \text{ cas})$$

$$\phi = [u]_{\Gamma} \quad (2^{eme} \text{ cas})$$

Soit le problème

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \omega^2 u_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ (2) \quad \sigma(u) \cdot n_{\Gamma} = g \in V_o' \end{array} \right. \quad i = 1, 2$$

$\omega \in \mathbb{C}_+$; si $\omega \in \mathbb{R}_+^{(*)}$, on rajoute la condition sortante sur u .

Théorème 3.1 \mathcal{P} admet une solution unique $u = D(\omega)g$.

Démonstration:

En effet, l'inégalité de Korn est valable dans les deux cas :

$$\int_{\Omega} [|\varepsilon(u)|^2 + |u|^2] d\Omega \geq c \|u\|_V^2$$

Nous pouvons donc définir comme au 2.1.2 l'opérateur $S(\omega)$:

$$\begin{aligned} S(\omega) : V'_o &\longrightarrow V_o \\ g &\longmapsto \phi = [(D(\omega).g)] \text{ (ou } (D(\omega).g)_{\Gamma}) \end{aligned}$$

$S(\omega)$ est inversible si $\omega \in \mathbb{C}_+$, car son inverse est $T(\omega)$, défini comme au (2.1.2) (on résout \mathcal{P} avec condition D : $u = \phi$).

Ainsi la définition des résonances est formellement totalement identique à celle du chapitre précédent: nous chercherons à annuler une valeur propre de $T(\omega)$.

Remarques:

- L'existence du prolongement de T (ou de S) se démontre comme au chapitre précédent, par la proposition de Steinberg.
- Les résonances sont fondamentalement non réelles, car, une fois encore, le théorème d'absorption limite est applicable.
- Cependant, nous n'avons plus les résultats des théorèmes généraux "T.G" valables pour les ondes acoustiques. Ils sont d'ailleurs faux ici à cause du phénomène de l'onde de Rayleigh; l'exemple qui suit est clair à ce sujet.

3.2 Exemple : cas du disque élastique

Nous allons voir en particulier qu'il existe une suite de résonances s'approchant très rapidement de l'axe réel à l'infini. Ce résultat n'est pas nouveau, puisque l'étude du disque (ou d'une sphère en DIM 3) élastique plongé dans un fluide (et aussi de la cavité circulaire dans un milieu ambiant élastique) a été très approfondie par Uberall, qui donne une interprétation physique de l'état résonnant [23], [25], [24], [26]. A. Gérard traite le cas de plusieurs disques (ou sphères) élastiques concentriques dans [7]. Nous nous bornerons ici à donner une expression de l'onde, une caractérisation simple des résonances, et leur valeur asymptotique. L'évaluation de la section efficace pour les grandes fréquences est faite en annexe 5.8.2.

3.2.1 Caractérisation de la solution

Calculons la solution u de \mathcal{P} avec :

$$(\sigma(u))_r = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{(1)} \\ g^{(2)} \end{pmatrix} = g$$

Nous cherchons u sous la forme:

$$u = \vec{\nabla} \Phi + \vec{\nabla} \wedge (\Psi \vec{e}_z)$$

\vec{e}_z : unitaire, orthogonal au plan du disque.

$$\Phi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n(r) e^{in\theta}$$

$$\Psi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n(r) e^{in\theta}$$

En décomposant g par :

$$g^{(i)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n^{(i)} e^{in\theta} \quad i = 1, 2$$

(1) s'écrit pour chaque indice n :

$$\omega^2 \Phi_n(r) + V_p^2 (\Phi_n''(r) + \frac{1}{r} \Phi_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} \Phi_n(r)) = 0$$

$$\omega^2 \Psi_n(r) + V_s^2 (\Psi_n''(r) + \frac{1}{r} \Psi_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} \Psi_n(r)) = 0$$

Nous avons noté :

$$V_p^2 = \lambda + 2\mu \text{ et } V_s^2 = \mu$$

Finalement:

$$\Phi_n(r) = ia_n H_n^{(1)}(\omega \frac{r}{V_p})$$

$$\Psi_n(r) = b_n H_n^{(1)}(\omega \frac{r}{V_s})$$

La condition frontière est :

$$\begin{cases} (V_p^2 \Phi_n''(1) + \lambda(\Phi_n'(1) - n^2 \Phi_n) + 2\mu in(\Psi_n'(1) - \Psi_n(1))) & = g_n^{(1)} \\ \mu(in\Phi_n'(1) - n^2 \Psi_n(1) + in(-2\Phi_n(1) + \Phi_n'(1) + \Psi_n'(1) - \Psi_n''(1))) & = g_n^{(2)} \end{cases}$$

où 1 est le rayon du disque.

En remplaçant $\Phi_n(1)$ et $\Psi_n(1)$ par leur valeur, nous obtenons le système suivant:

$$\begin{cases} M_{11}^n(\omega)a_n + M_{12}^n(\omega)b_n & = -i(\frac{1}{V_s^2})g_n^{(1)} \\ M_{21}^n(\omega)a_n + M_{22}^n(\omega)b_n & = -(\frac{1}{V_s^2})g_n^{(2)} \end{cases}$$

Il y a une solution unique ssi

$$D_n(\omega) \equiv M_{11}^n M_{22}^n - M_{21}^n M_{12}^n \neq 0$$

Rappelons⁵ que:

$$\begin{cases} M_{11}^n(\omega) & = -2\omega_p H_n^{(1)'}(\omega_p) + (2n^2 - \omega_s^2) H_n^{(1)}(\omega_p) \\ M_{12}^n(\omega) & = 2n(\omega_s H_n^{(1)'}(\omega_s) - H_n^{(1)}(\omega_s)) \\ M_{21}^n(\omega) & = 2n(\omega_p H_n^{(1)'}(\omega_p) - H_n^{(1)}(\omega_p)) \\ M_{22}^n(\omega) & = -2\omega_s H_n^{(1)'}(\omega_s) + (2n^2 - \omega_s^2) H_n^{(1)}(\omega_s) \end{cases}$$

où nous avons pris pour simplifier:

$$\omega_s = \frac{\omega \cdot 1}{V_s} \quad \omega_p = \frac{\omega \cdot 1}{V_p}$$

Théorème 3.2 *Les résonances du disque élastique sont les zéros des déterminants $D_n(\omega)$, $n \in \mathbb{N}$.*

Théorème 3.3 (Résonances presque réelles) *Il existe une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de résonances, telle que:*

$$\omega_n = nV_n + iny_n$$

où

$$\begin{aligned} V_n & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_R \text{ vitesse de Rayleigh} \\ y_n & \sim -(c) \cdot e^{-2n\Phi} (< 0) \end{aligned}$$

et $\Phi > 0$; c'est-à-dire:

$$|\Im(\omega_n)| \sim (c) \cdot \Re(\omega_n) \cdot e^{-\tau \Re(\omega_n)}$$

Remarques:

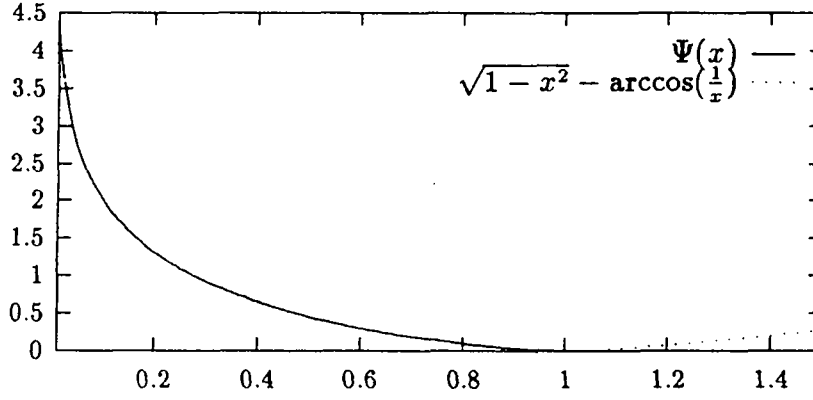
- Les unités sont supprimées par commodité : on a pris $V_s = 1$, $C_R \in [0; 1]$
- $\Phi = \Phi(C_R)$, avec (voir figure 5):

$$\Phi(x) = \log\left[\frac{(1 + \sqrt{1-x^2})}{x}\right] - \sqrt{1-x^2} \quad , x \in [0; 1]$$

La convergence vers l'axe réel est donc d'autant plus rapide que C_R est petit.

⁵comme dans Joly[14]

Figure 5 : Fonction Ψ



Démonstration:

L'idée est que si une onde tourne le long du disque (de rayon $a = 1$):

$$u(r, \theta, t) = u(r)e^{i(n\theta - \omega t)} = u(r)e^{\Im(\omega)t}e^{in/a(S - \Re(\omega)at/n)}$$

S est l'arc de cercle d'écrit par θ ;

$\frac{\Re(\omega)a}{n}$ se comporte comme une vitesse: C_R . D'où le changement : $\Omega = \omega a/n$

Nous allons regarder le comportement de $D_n(n\Omega)$ quand $n \rightarrow \infty$ et $\Omega \in \mathcal{V}(C_R)$ (\mathcal{V} =voisinage).

Remarquons, et c'est le point clé, que:

$$(i) \begin{cases} H_n^{(1)}(nz) &= J_n(nz) + iY_n(nz) \\ J_n(nz) &\stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} -e^{-2n\Phi(z)}Y_n(nz) \end{cases}$$

L'équivalence est uniforme selon $z \in \mathcal{V}(C_R)$ (pourvu que $0 < \Re(z) < 1$). D'ailleurs, Olver[20] et Abramowitz-Segun[1] donnent:

$$Y_n(nz) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} -\left(\frac{4\eta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} Bi\left(\frac{n^{\frac{2}{3}}\eta}{n^{\frac{1}{3}}}\right)(1 + \dots + o(n^{-k}))$$

pour $k \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{3}\eta^{\frac{2}{3}} = \Phi(z)$, Bi : fonction d'Airy

ceci uniformément en z tel que: $|\arg(z)| \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$ donné.

Nous avons aussi:

$$(ii) H_n^{(1)'}(nz) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} H_n^{(1)}(nz)$$

$D_n(n\Omega)$ s'écrit grâce à (i), en mettant les Y_n en facteur:

$$D_n(n\Omega) = \frac{-n^4}{\Omega^4} Y_n(n\Omega) Y_n(n\Omega_p) \left[A\left(\Omega, \frac{1}{n}\right) + ie^{-2n\Phi} B\left(\Omega, \frac{1}{n}\right) \right]$$

où l'on a noté $\Omega_p = \Omega/V_p$. A et B s'obtiennent grâce à (ii), en considérant le développement de $D_n(n\Omega)$ aux ordres successifs en (n^{-k}) :

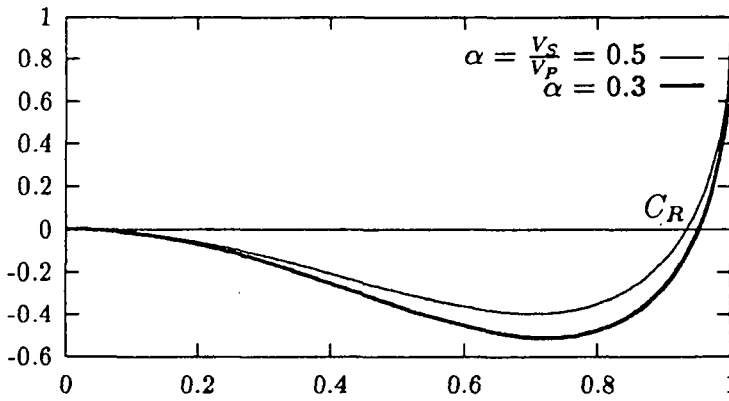
$$A(\Omega, \frac{1}{n}) = f(\Omega) + \frac{1}{n}A_1(\Omega) + \dots + \frac{1}{n^k}A_k(\Omega) + o(\frac{1}{n^k})$$

$$B(\Omega, \frac{1}{n}) = B_0(\Omega) + \frac{1}{n}B_1(\Omega) + \dots$$

$$f(\Omega) = (2 - \Omega^2)^2 - 4(1 - \Omega^2)^{\frac{1}{2}}(1 - \Omega_p^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{voir figure 6}$$

$$B_0(\Omega) = (2 - \Omega^2)^2 + 4(1 - \Omega^2)^{\frac{1}{2}}(1 - \Omega_p^2)^{\frac{1}{2}}$$

Figure 6 : Fonction de Rayleigh



(i) implique que $A(\Omega, \epsilon)$ est réelle lorsque Ω est réel ($0 \leq \epsilon < \epsilon_0$). f est la fonction de Rayleigh et s'annule une seule fois dans $]0;1]$ ($f(0) = 0$ cependant).

Nous allons maintenant appliquer deux fois le théorème des fonctions implicites; nous profitons en effet de ce que A est C^1 et B est continue sur $\mathcal{V}(C_R) \times \mathcal{V}(0)$: D'abord, il existe une suite $(V'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que:

$$V'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_R$$

$$A(V'_n, \frac{1}{n}) = 0$$

En effet :

$$A(C_R, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial A}{\partial \Omega}(C_R, 0) = f'(C_R) > 0$$

Nous avons même en plus:

$$V'_n = C_R + \frac{1}{n}V^1 + \dots + \frac{1}{n^k}V^k + o(n^{-k})$$

grâce au développement de A en puissances de ϵ^k ($\epsilon = \frac{1}{n}$). D'autre part, la fonction F :

$$F(\Omega, \epsilon) \equiv A(\Omega, \epsilon) + ie^{-2\Phi(\Omega)/\epsilon} B(\Omega, \epsilon)$$

s'annule en $\Omega_n = V_n + iy_n$, $n = \frac{1}{\epsilon}$, pour les mêmes raisons:

$$F(C_R, 0) = f(C_R) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega}(C_R, 0) = f'(C_R) \neq 0$$

avec :

$$\Omega_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} C_R \text{ donc: } \begin{matrix} V_n & \sim & C_R \\ y_n & \rightarrow & 0 \end{matrix}$$

Soit alors

$$G_n(\delta + iy) \equiv A(V'_n + \delta + iy, \frac{1}{n}) \quad n \text{ assez grand}$$

$$\text{on a: } G_n(0) = 0$$

$$G'_n(0) = \frac{\partial A}{\partial \Omega}(\Omega_n, \frac{1}{n}) \sim f'(C_R) \neq 0$$

Donc pour n assez grand, $G'_n(0) \neq 0$. Posons alors:

$$\delta_n = V_n - V'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ecrivons que Ω_n est un zéro de F :

$$G_n(\delta_n + iy_n) = -ie^{-2n\Phi(\Omega_n)} B(\Omega_n, \frac{1}{n})$$

De plus, Ω_n tend vers C_R , c'est-à-dire que δ_n et y_n tendent vers 0; donc:

$$G_n(\delta_n + iy_n) = (\delta_n + iy_n)(G'_n(0) + o(1))$$

autrement dit:

$$\delta_n + iy_n \sim \frac{-i}{f'(C_R)} B(C_R, 0) e^{-2n\Phi(\Omega_n)}$$

finalement:

$$y_n \sim \frac{-B(C_R, 0)}{f'(C_R)} e^{-2n\Phi(V_n)} \quad (< 0 !)$$

$$V_n \sim C_R (+O(\frac{1}{n}))$$

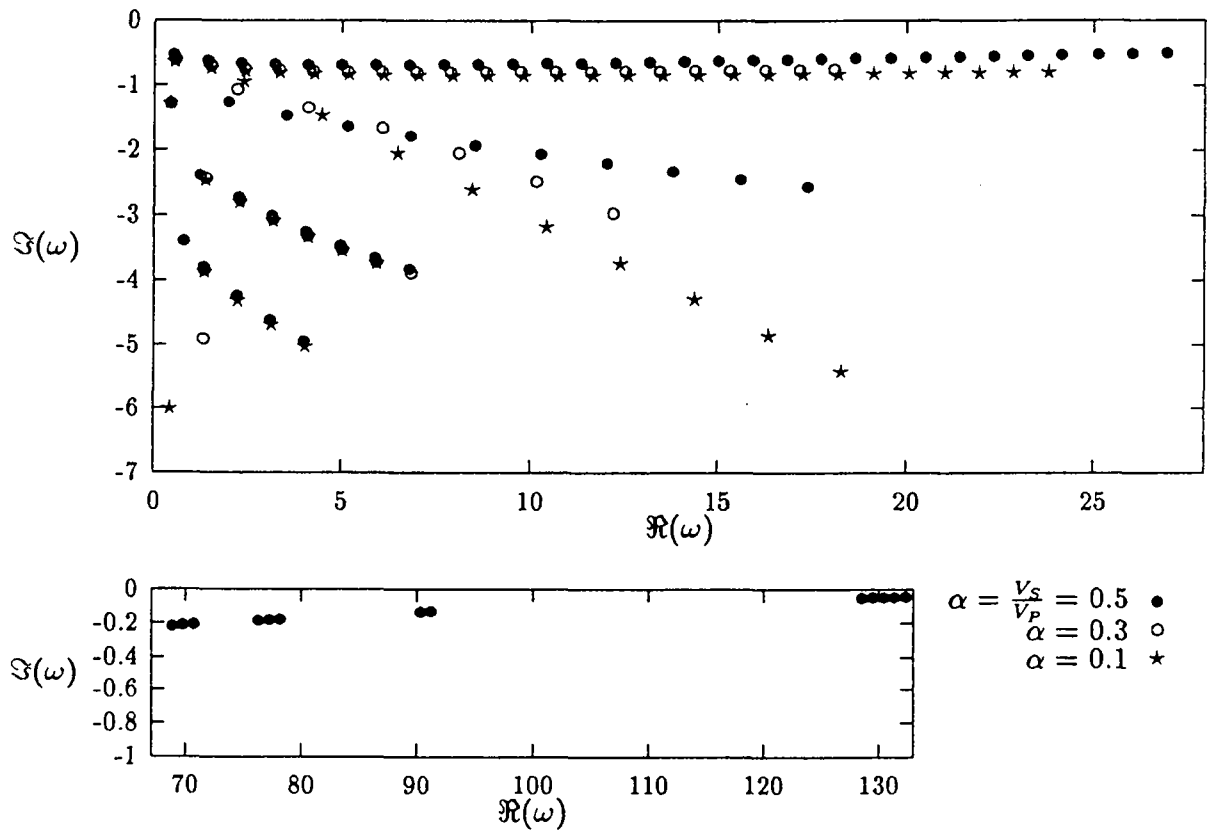
$$\text{et } D_n(n(V_n + iy_n)) = 0$$

Remarque importante: L'ordre de $\Phi(C_R)$ est 10^{-2} , donc il faudra aller très loin en fréquence
($n \sim 100$) pour voir vraiment une telle forme de convergence.

3.2.2 Calculs numériques

Quelques résonances ont été calculées pour différentes valeurs du rapport $\alpha = V_s/V_p$. Nous voyons apparaître sur la figure 7, à chaque α fixé, une suite de pôles se rapprochant de \mathbb{R} . Cependant, il est difficile de résoudre numériquement $D_n(\omega) = 0$, sans utiliser les simplifications du théorème 3.3. Les résultats ne vont donc pas très loin en fréquence. Notons cependant que nous retrouvons sur le dessin la vitesse de Rayleigh, comme écart environ entre deux points successifs.

Figure 7 : Résonances du disque élastique



3.3 Exemple 2: la fissure rectiligne élastique

Comme au chapitre précédent pour la fissure acoustique, l'inconnue du problème \mathcal{P} est ϕ : saut de u à travers Γ . \mathcal{P} admet alors une formulation variationnelle de la forme:

$$b(\phi, \psi) = \nu_o' < g; \psi >_{\nu_o} \quad \text{où } g = (\sigma(u) \cdot n)_\Gamma$$

L'expression de b est très compliquée en général, mais fait intervenir des intégrales doubles sur Γ dont les noyaux sont obtenus par les fonctions de Hankel (voir Bamberger[3]).

Dans le cas d'une fissure rectiligne, exceptionnellement, b se sépare en $b_1(\phi_1, \psi_1) + b_2(\phi_2, \psi_2)$: il n'y a pas couplage entre $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ et $\psi = (\psi_1, \psi_2)$. Nous donnons l'expression complète en Annexe 5.7.1, avec celle de la dérivation de b .

Définition 3.1 Nous définissons les résonances comme pour la fissure acoustique, à savoir que ce sont les zéros de valeur(s) propre(s) de T , opérateur associé à b . Ici, avec le découplage, nous avons la propriété : ω est une résonance ssi

$$\begin{aligned} \exists \phi \in H_{\partial o}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \setminus \{0\}, \forall \psi \in H_{\partial o}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ b_1(\phi, \psi) = 0 \quad \text{ou} \quad b_2(\phi, \psi) = 0 \end{aligned}$$

Remarques:

- Les singularités des noyaux de b sont encore en $\log(|x|)$.
- pour une fissure quelconque, la forme $b(\phi, \psi)$ s'exprime plus facilement à l'aide des transformées de Fourier (quand $\Im(\omega) \geq 0$) :

$$\begin{aligned} b(\phi, \psi) &= \sum_{i,j=1}^2 b_{ij}(\phi_i, \psi_j) \\ b_{ij}(\phi_i, \psi_j) &= \int_\Gamma \int_\Gamma G_{ij}(y-x) \frac{d\phi_i}{d\sigma(x)}(x) \frac{d\bar{\psi}_j}{d\sigma(y)}(y) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &+ \int_\Gamma \int_\Gamma (M_{ij}(y-x) \cdot n(x) \cdot n(y)) \phi_i \bar{\psi}_j d\sigma(x) d\sigma(y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \hat{G}_{ij}(\xi) &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} (\delta_{ij} \frac{|\xi|^2}{\Delta(\xi)} - \frac{\xi_i \xi_j}{\Delta(\xi)}) \\ |\xi|^2 &= \xi_1^2 + \xi_2^2 \\ \Delta(\xi) &= (|\xi|^2 - \frac{\omega^2}{V_p^2})(|\xi|^2 \frac{\omega^2}{V_p^2}) \end{aligned}$$

$M_{ij}(\xi)$ est un déterminant donné dans Bamberger[3].

• La fonction de Rayleigh apparait directement dans le cas de la fissure rectiligne, dans l'expression "Fourier" (où ξ est la variable): elle est un facteur multiplicatif de $\hat{T}(\xi)$.

• Attention: pour la fissure rectiligne, la transformation de Fourier est faite selon la seule direction Ox , alors que dans le cas général, c'est selon les deux directions Ox et Oy : $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$.

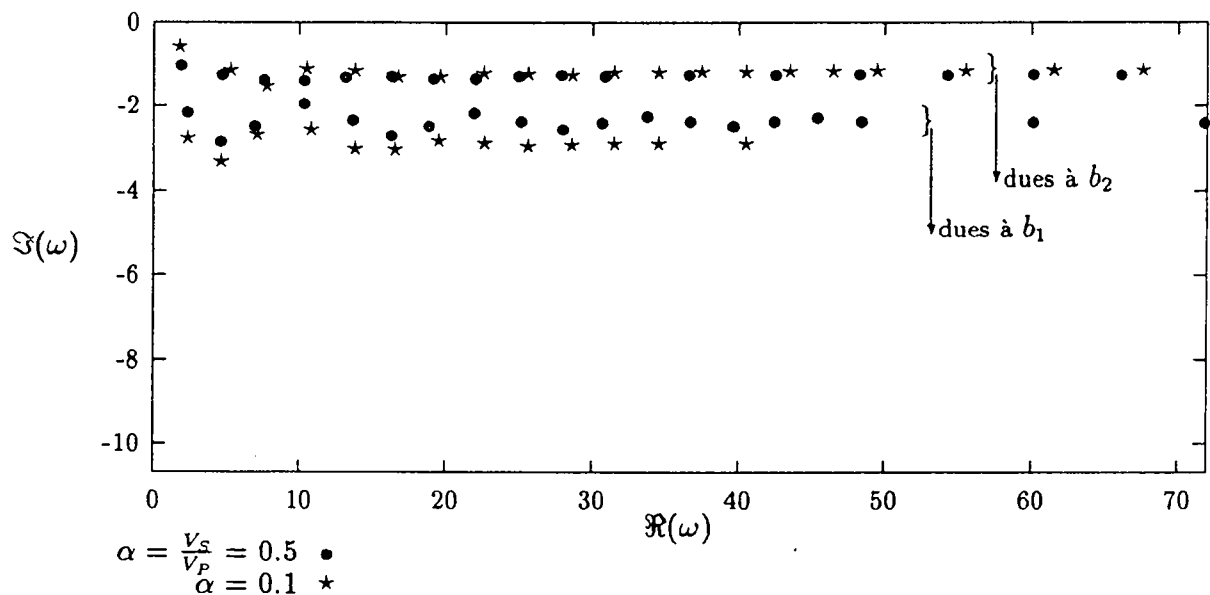
3.4 Calculs numériques pour la fissure rectiligne

La méthode de recherche des résonances est identique à celle du chapitre précédent (fissure acoustique). Nous avons deux sortes de résonances, correspondant aux deux formes séparées b_1 et b_2 . C'est pourquoi nous nous attendons à obtenir deux suites de pôles, dont les formes asymptotiques à l'infini ($\Re(\omega) \rightarrow \infty$) sont identiques: nous pensons que contrairement à la fissure acoustique, ces suites ne s'éloignent pas de l'axe réel; en fait, numériquement (figure 8), elles semblent converger chacune vers une limite $-i\alpha_j$, $j=1,2$; nous remarquons que l'inégalité:

$$0 < \alpha_2 < \alpha_1$$

est toujours vérifiée pour tout α ; de plus, α_2 varie peu (est-ce une constante?) par rapport à α . D'autre part, l'écart entre deux résonances successives s'approche rapidement de la vitesse de Rayleigh, confirmant l'importance de l'onde captée correspondante.

Figure 8 : Résonances de la fissure rectiligne élastique



3.5 Conjectures

- Nous pensons que le théorème 3.3 appliqué et démontré au cas du disque élastique est valable encore pour des bords $\Gamma : C^\infty$ et analytiques. Le cas d'une fissure élastique semble différent: les résonances ne s'approchent pas de l'axe réel.

- Pour des obstacles à bord analytique, les courbes sur lesquelles se trouvent les premières résonances ($|\Im(\omega)|$ est minimum) sont d'autant plus proches de l'axe réel que le rapport $V_R = \frac{V_s}{V_p}$ est grand. Ceci est vrai dans le cas du disque, et semble faux pour la fissure rectiligne.

4 Conclusion

Nous avons donc étudié les fréquences de résonance pour une unique fissure plane, rectiligne acoustique ou élastique. La méthode et les résultats numériques sont très satisfaisants, d'autant plus qu'ils correspondent à ce que nous espérions de la théorie. Une critique pourra cependant être faite sur le choix des fonctions de base discrète, ignorant le comportement particulier des modes propres aux bords de la fissure Γ . Par exemple, il suffirait de rajouter une fonction en \sqrt{x} , où x = distance à $\delta\Gamma$, dans la base; ou bien discrétiser beaucoup plus Γ en $\delta\Gamma$. Mais nous perdrons la structure Toeplitz de la matrice discrète et la facilité des calculs de ses coefficients. Ceci n'est pas une bonne raison quand la taille de la matrice devient élevée; c'est pourquoi la suite du travail présenté ici contiendra la création d'un algorithme de recherche de résonances pour des fissures de forme quelconque (en évitant les cas pathologiques où celle-ci est trop mince), discrétisées astucieusement.

Nous espérons aussi montrer bientôt des résultats pour l'obstacle captif le plus simple: deux fissures acoustiques parallèles en regard. Il devrait y avoir une suite de résonances convergeant vers l'axe réel à l'infini (comme pour le disque élastique). Le problème est alors d'évaluer numériquement cette convergence.

Le concept de résonance ne se limite pas aux deux équations présentées dans ce rapport; il intervient plus généralement dans les équations avec potentiels (Schrodinger ...). Il n'y a pas toujours de théorème comparable à celui de l'absorption limite (voir Hasard [9]), et des pôles réels peuvent exister pour des problèmes "extérieurs".

5 Annexe—Compléments—Notations

5.1 Notations diverses

$\Re(z)$ signifie partie réelle du nombre complexe z ; $\Im(z)$ est sa partie imaginaire.

$$\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) < 0\}$$

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\}$$

$$\mathbb{C}_{-+} = \{z \in \mathbb{C}_-, \Re(z) \geq 0\}$$

$$\tilde{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C}, z \neq 0, \Re(z) \geq 0\}$$

(c^*) désignera une constante multiplicative non nulle dont la valeur (connue en général d'ailleurs) n'aura aucune importance pour la suite de l'exposé. Ce terme sera donc supprimé parfois pour simplifier le texte.

G sera en général la solution fondamentale (en dimension 2 ou 3) de:

$$(-\Delta - \omega^2)G = \delta$$

Ai et Bi sont les fonctions d'Airy (voir Olver [20])

Si u est dans $H^1(\Omega)$, cela ne suffit pas à définir sa dérivée normale sur $\partial\Omega$. Il est meilleur d'utiliser:

$$u \in H^1(\Delta; \Omega) = \{v \in H^1(\Omega); \Delta v \in L^2(\Omega)\}$$

Ce dernier espace n'est pas utilisé dans les formulations car u est considérée comme solution de l'équation de Helmholtz (impliquant $\Delta u \in L^2(\Omega)$).

C_R = vitesse de Rayleigh

$\alpha = \frac{V_S}{V_P}$ = rapport des vitesses des ondes "S" et "P".

$R(z, T) = (z - T)^{-1}$ est la résolvante de T en z .

Opérateur semi-Fredholm (chap. 2 section 2.3.3): soit T fermé de X dans Y (Banach); T est dit semi-Fredholm lorsque $R(T) \equiv T(X)$ est fermé et l'une où l'autre des grandeurs $\dim(Ker(T))$ et $\dim(Y/R(T))$ est un nombre fini.

5.2 Rappels sur les fonctions de Bessel et Hankel

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z)$$

J et Y sont réelles sur les réels. Quand $z \rightarrow 0$:

$$J_n(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^n / (n+1)!$$

$$Y_n(z) \sim -iH_n^{(1)}(z) \sim -\frac{n!}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}$$

$$Y_0(z) \sim -iH_0^{(1)}(z) \sim \frac{2}{\pi} \log(z)$$

- Représentation intégrale:

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta$$

$$H_n^{(1)}(x) = -\frac{2i\pi(x/2)^{-n}}{\pi^{1/2}\Gamma(\frac{1}{2}-n)} \int_1^\infty \frac{e^{ixt}}{(t^2-1)^{n+1/2}} dt \quad (x > 0)$$

- Equation différentielle: $H_n^{(1)}, J_n, Y_n$ sont solutions de:

$$(B) \quad z^2 y''(z) + zy'(z) + (z^2 - n^2)y = 0$$

Coupure de $H_0^{(1)}$: c'est $-i\mathbb{R}_+$; elle est due à l'intervention du log dans Y_0 .

- Limites quand $n \rightarrow +\infty$ ou $z \rightarrow \infty$:

Si $|z| \rightarrow \infty$:

$$H_n^{(1)}(z) \sim (-i)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z-\pi/4)}$$

(pour $-\pi < \arg(z) < 2\pi$)

Si $n \rightarrow +\infty$:

$$J_n(z) \sim (2\pi n)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{ez}{2n}\right)^n$$

$$Y_n(z) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{ez}{2n}\right)^{-n}$$

$$J_n(nz) \sim \left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{Ai(n^{\frac{2}{3}}\zeta)}{n^{\frac{1}{3}}}$$

$$Y_n(nz) \sim -\left(\frac{4\zeta}{1-z^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{Bi(n^{\frac{2}{3}}\zeta)}{n^{\frac{1}{3}}}$$

avec

$$\frac{2}{3}\zeta^{\frac{2}{3}} = \Phi(z)$$

- Zéros de $H_\mu'^{(1)}$ (μ réel): ce sont les z tels que

$$\mu = \mu_p(z)$$

$$\text{avec } \mu_p(z) \sim z + \sigma_p e^{i\frac{\pi}{3}} (z/2)^{\frac{1}{3}} + O(z^{-\frac{1}{3}})$$

où σ_p est le p^{ieme} zéro de $Ai'(-\sigma)$

Référence: Ehud Heyman; L.B Felsen [10].

5.3 Notes sur $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$

Référence: Lions-Magenes [18] volume 1, N°11 et volume 2 chapitre 5 .

Nous prendrons $\Gamma = [-1; 1]$ pour simplifier. Nous noterons $V_o = H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
La transformée de Fourier d'une fonction ϕ de $\mathcal{D}(\Gamma)$ est définie par:

$$\hat{\phi}(\xi) = \int_{\Gamma} e^{-i\xi x} \phi(x) dx$$

Nous avons donc prolongé ϕ par 0 sur \mathbb{R} .

Définition 5.1

$$V_o = \{ \phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \int_{-1}^1 \frac{|\phi(x)|^2}{\rho(x)} dx < \infty \}$$

où $\rho(x) = 1 - x^2$. Exemple: $\phi(x) = \sqrt{1 - x^2} \in V_o$

Théorème 5.1 V_o admet comme normes équivalentes:

$$\|\phi\|_{V_o} = (\|\phi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\frac{\phi}{\sqrt{\rho}}\|_{L^2(\Gamma)}^2)^{1/2}$$

$$\|\phi\| = (\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|) |\hat{\phi}|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}$$

$$|\phi| = (\int_{\mathbb{R}} |\xi| |\hat{\phi}|^2 d\xi)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration:

Pour démontrer l'équivalence des deux premières normes, il vaudra mieux aller voir la référence ci-dessus, où les auteurs définissent V_o comme étant l'espace interpolé $[H_0^1(\Gamma); L^2(\Gamma)]_{1/2}$.
Nous montrons donc seulement l'équivalence de la dernière norme avec la deuxième:

Supposons qu'il existe une suite (ϕ_n) telle que:

$$\|\phi_n\|_{L^2} = 1, \text{ et } |\phi_n|_{V_o} \rightarrow 0$$

V_o est un Hilbert donc comme (ϕ_n) est bornée, elle converge (ou une sous-suite) faiblement vers $\psi \in V_o$.

L'injection de V_o dans $L^2(\Gamma)$ est compacte, donc nous avons aussi convergence forte de (ϕ_n) vers ϕ dans $L^2(\Gamma)$.

L'hypothèse initiale montre alors facilement la propriété:

$$\forall g \in V_o : \langle \psi; g \rangle_V = (\phi; g)_{L^2}$$

Pour $g = \psi$, nous obtenons $\psi = 0$ car $\|\phi\| = 1$. Donc $\phi = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Il y a ainsi une inégalité du type Poincaré: $\forall \phi \in V_o$:

$$|\phi|_{V_o} \geq c \|\phi\|_{L^2} \quad c > 0$$

Bases de V_o :

Une fréquence (réelle) ω étant donnée, les fonctions de Mathieu (voir Annexe(4.4)) $se_n(\arccos(x))$ forment une base pratique de V_o . Dans le cas particulier $\omega = 0$, nous avons la base $\sin(n \arccos(x))$. La norme associée est:

$$\|\phi\| = (\sum_n n |\phi_n|^2)^{1/2}$$

où

$$\phi(x) = \sum_{n \geq 1} \phi_n \sin(n \arccos(x))$$

Remarque:

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{g(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \cos(n \arccos(x)) ; \sum_{n \geq 1} n |g_n|^2 < \infty\}$$

$$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{g(x) = (\sum_{n \geq 0} g_n \cos(n \arccos(x))) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ; \sum_{n \geq 1} \frac{|g_n|^2}{n} < \infty\}$$

5.4 Notes sur T_h , fissure acoustique rectiligne

5.4.1 Normes équivalentes

A $T_h(\omega)$ nous associons la matrice:

$$A_h(\omega) = (< T(\omega)w_i; w_j >)_{1 \leq i, j \leq N} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$$

Notons $(.)$ le produit hermitien dans \mathbb{C}^N , $|||_h$ sa norme associée, et $|||_2$ la norme dans $L^2(\Gamma)$.

Théorème 5.2 Les normes $\frac{1}{\sqrt{h}}|||_2$ et $|||_h$ sont équivalentes:

$\exists c_1, c_2 \neq 0$, $\forall h \leq h_o$, $\forall \phi_h \in V_N$:

$$\frac{c_1}{\sqrt{h}}\|\phi_h\|_2 \geq \|\phi_h\|_h \geq \frac{c_2}{\sqrt{h}}\|\phi_h\|_2$$

Démonstration:

Posons $\phi_h = \sum_{i=1}^N \phi_i w_i$, $\phi_0 = \phi_{N+1} = 0$

Après avoir vérifié que:

$$\begin{aligned} \|w_i\|_2^2 &= 2h/3 \\ < w_i; w_{i+1} > &= h/6 \\ < w_i; w_j > &= 0 \quad \text{si } j \notin \{i-1, i, i+1\} \end{aligned}$$

Nous calculons:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\|\phi_h\|_2^2 &= \|\phi_h\|_h^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1})\bar{\phi} \\ &= \frac{2}{3}\|\phi_h\|_h^2 + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^N \phi_i \bar{\phi}_{i+1} \\ &\leq \|\phi_h\|_h^2 \\ &\geq \frac{1}{3}\|\phi_h\|_h^2 \end{aligned}$$

5.4.2 Calculs des a_{ij}

Si $|i-j| \leq nmin$ (=25 en pratique), alors a_{ij} est une (somme d') intégrale double que l'on simplifie en intégrale simple, le noyau étant de la forme $f(x-y)$, par le changement de variables: $s = x-y$ et $t = x+y$.

Remarque: en fait $f(r) = H_0^{(1)}(\omega r) + \log(r)$. Le calcul des intégrales de noyau log est effectué analytiquement.

Si $|i-j| > nmin$, nous considérons les w_i comme approchant des distributions à support ponctuel (en ih), et nous dirons que les a_{ij} sont calculés par développement asymptotique ($p = |i-j| \approx \infty$!).

Justification: soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et paire (pour la circonstance);

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) w'_0(x) dx &= (1/h) \int_0^h [\phi(-x) - \phi(x)] dx \\ &= -\phi'(0) - \frac{h^2}{12} \phi^{(2)} + O(h^4) \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} w'_0 &\simeq \delta'_0 + \frac{h^2}{12} \delta_0^{(3)} + O(h^4) \\ w \equiv w_0 &\simeq \delta_0 + \frac{h^2}{12} \delta_0^{(2)} + O(h^4) \\ b_{ij} &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} f(x-y) w'(x) w'(y-y_o) dx dy \\ &= \int_{\Gamma} w'(y-y_o) (f * w)'(y) dy \end{aligned}$$

où f est paire, et $y_o = ph$. Donc:

$$b_{ij} = -f''(y_o) - \frac{h^2}{6} f^{(4)}(y_o) + O(h^4)$$

Nous obtenons aussi:

$$c_{ij} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} f(x-y) w(x) w(y-y_o) dx dy \simeq f(y_o) + \frac{h^2}{6} f^{(2)}(y_o) + O(h^4)$$

Remarque: lorsque p n'est pas grand, l'approximation n'est plus valable, principalement à cause de la présence du \log dans f . Or si $f \equiv \log$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} h^2 b_{ij} &= -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^4} + O\left(\frac{1}{p^6}\right) \\ c_{ij} &= -\log(ph) + \frac{1}{6p^2} + O\left(\frac{1}{p^4}\right) \end{aligned}$$

Ce sont exactement les développements obtenus par les formules exactes provenant de l'intégration double dans le cas $p \leq nmin$.

L'étude des erreurs commises avec $f = H_0^{(1)}(\omega)$ a montré que cette méthode est largement supérieure (en précision et en rapidité) à celle non asymptotique.

5.5 Etude de la fissure rectiligne par coordonnées elliptiques

Nous considérons $\Gamma = [-1; 1]$ et le changement de coordonnées:

$$\begin{aligned} x &= \cos(\xi) \cosh(\eta) \\ y &= \sin(\xi) \sinh(\eta) \quad \eta \in \mathbb{R}_+ \quad \xi \in [-\pi; \pi] \end{aligned}$$

Une ellipse centrée en 0, d'axes Ox et Oy aura pour équation $\eta = cste$.
Cherchons une solution de (1):

$$(1) \quad -\Delta u - \omega^2 u = 0$$

sous la forme $u = F(\xi)G(\eta)$. La formule du Laplacien

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) (\cosh^2(\eta) - \cos^2(\xi))^{-1}$$

et (1) mènent à (voir Campbell[6]):

$$F''(\xi) - (\omega^2 \cos^2 \xi + c)F(\xi) = 0$$

$$G''(\eta) + (\omega^2 \cosh^2 \eta + c)G(\eta) = 0$$

Ces deux équations sont dites respectivement "de Mathieu" et "de Mathieu modifiée":

$$(M) \quad y''(z) + (p - 2q \cos(2z))y(z) = 0$$

$$(M') \quad y''(z) - (p - 2q \cosh(2z))y(z) = 0$$

où $z = \eta$ ou ξ , $q = \omega^2/4$, $p = -c - \omega^2/2$.

Si l'on veut que F soit périodique (2π), alors $p = p_n(q)$ ($n \in \mathbb{N}$).

La condition $[\frac{\partial u}{\partial n}]_\Gamma = 0$ force à prendre $F = se_n$, solution impaire de (M).

En effet:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, 0\pm) = F(\pm\xi)G'(0) \text{ où } \xi \in [0, \pi]$$

Pour $x = \cos(\pm\xi) \in]-1; 1[$, la dérivée normale de u est obtenue par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0\pm) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \\ &= F(\pm\xi) \frac{G'(0)}{\sin(\pm\xi)} \end{aligned}$$

d'où

$$[\frac{\partial u}{\partial n}]_\Gamma = -\frac{G'(0)}{|\sin(\xi)|} (F(\xi) + F(-\xi))$$

or $G'(0) \neq 0$, sinon $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ et $u = 0$; donc F est bien impaire.

La solution de $\mathcal{P}_\Gamma(\phi)$ est finalement:

$$u(x, y) = -\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{G_n(\eta)}{G_n(0)} \phi_n se_n(\xi)$$

avec:

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_n se_n(\xi) \quad x = \cos \xi$$

et l'opérateur $T(\omega)$ s'écrit:

$$T(\omega)\phi(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{G'_n(0)}{G_n(0)} \phi_n se_n(\arccos x)$$

Remarques:

- Tout ceci est bien établi pour des fréquences réelles. Il ne reste (!) plus qu'à trouver le prolongement analytique de $T(\omega)$ grâce à ceux des se_n et G_n (et des $p_n(q)$): ce n'est pas une mince affaire et semble ne pas avoir été étudié.

- G_n est déterminé par (M') , $p = p_n(q)$, et la condition sortante (quand ω est réel). MacLachlan utilise à sa place la notation $Ne_n^{(1)}(z, q)$, ses zéros (ou de sa dérivée) étant aussi ceux de $gekh_n(z, q)$ (notation de Campbell).

- Nous voyons que les résonances ont pour modes propres associés les fonctions $se_n(\arccos x) \sim \sqrt{2}\sqrt{1-x} \cdot se'_n(0)$ quand $x \rightarrow 1$. Il y a résonance lorsque $G'_n(0) = 0$.

5.6 Fissure acoustique: condition de Dirichlet

5.6.1 Définition/Caractérisation de l'opérateur S_1 et des résonances

Nous avons vu que la condition de Neumann de la fissure est:

$$[\frac{\partial u}{\partial N}]_{\Gamma} = 0$$

La condition de Dirichlet, imposant $(u)_{\Gamma} = \phi$ donnée dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est donc:

$$[u]_{\Gamma} = 0$$

Il en résulte que u sera dans $H^1_{(loc)}(\mathbb{R}^2)$. Le problème s'écrit pour $\omega \in \mathbb{C}_+$:

$$\mathcal{P}_N \begin{cases} -\Delta u - \omega^2 u = 0 & \text{dans } \Omega \\ [\frac{\partial u}{\partial N}]_{\Gamma} = g & \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ [u] = 0 \\ u \in H^1(\mathbb{R}^2) \end{cases}$$

La formulation variationnelle de \mathcal{P}_N est :

$$b(u, v) \equiv \int_{\Omega} [\nabla u \nabla \bar{v} - \omega^2 u \bar{v}] d\Omega = \int_{\Gamma} g \bar{v} d\Gamma$$

Définition 5.2

$$S_1 : g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \longmapsto \phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

où $\phi = (u)_{\Gamma}$, u étant la solution de $\mathcal{P}_N(g)$.

S_1 est caractérisé par: $\forall g, h \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

$$\langle S_1 g; h \rangle = \frac{i}{4} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} H_0^{(1)}(\omega |x - y|) g(\gamma(x)) \bar{h}(\gamma(y)) d\gamma(x) d\gamma(y)$$

$S_1(\omega)$ se prolonge analytiquement à \mathbb{C}_{-+} , est inversible tant que $\Im(\omega) \geq 0$, et son inverse T_1 est méromorphe sur \mathbb{C}_{-+} . Les résonances D sont les ω annulant une valeur propre de S_1 . Leur seul point d'accumulation possible (hormis l'infini) est zéro, ce qui n'est pas le cas; en effet, supposons qu'il y ait une suite ω_n de résonances convergeant vers zéro; soit g_n la suite dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ de modes propres associés, de norme 1; quand $n \rightarrow \infty$, $S_1(\omega_n)q$ se comporte comme:

$$S_0 q - \frac{1}{2\pi} \log(\omega_n) \langle q; 1 \rangle + o(\|q\|_{-\frac{1}{2}, \Gamma})$$

où

$$S_0 q = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log(|x - y| q(\gamma(y))) d\gamma(y)$$

$b(q, q) \equiv \langle S_o q; q \rangle$ est coercif sur

$$H_o = \{q \in H^{-1/2}(\Gamma); \langle q; 1 \rangle = 0\}$$

(voir Nédélec [19] ou Giroire [8]). Posons:

$$g_n = \tilde{g}_n + a_n 1$$

avec

$$\tilde{g}_n \in H_o \text{ et } \langle g_n; 1 \rangle = a_n \text{mes}(\Gamma)$$

$\langle S_o g_n; g_n \rangle = o(1)$ et $|\log(\omega_n)| \rightarrow \infty$ montrent que

$$a_n \rightarrow 0 \text{ et } \tilde{g}_n - g_n \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Donc

$$\langle S_o g_n; \tilde{g}_n \rangle = o(1) = b(\tilde{g}_n; \tilde{g}_n)$$

ce qui est contradictoire avec la coercivité de b .

Il n'y a donc aucun point du plan complexe où les résonances puissent s'accumuler

Remarque: Cas de la fissure rectiligne

Grâce à l'étude précédente des coordonnées elliptiques, l'opérateur S_1 est donné par:

$$S_1(\omega)g(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{L_n(0)}{L'_n(0)} g_n ce_n(\arccos x)$$

avec:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n \in \mathbb{N}} g_n ce_n(\arccos x)$$

Les L_n sont solutions de (M') équation de Mathieu modifiée, avec cependant $p = a_n(q)$ et non plus $p_n(q)$. Les ce_n sont les solutions paires de (M), et fixent les a_n pour être périodiques (2π). Ainsi les résonances D sont les zéros des $L_n(0)$.

5.6.2 Etude numérique

Les éléments de $H^{-1/2}(\Gamma)$ sont approchés par les fonctions constantes par morceaux, de base $\{C_i\}_{i=1, \dots, N}$, $C_i(x) = 1$ sur $[x_{i-1}, x_i]$ et 0 ailleurs. Nous définissons alors la matrice associée à S_1 :

$$M_h(\omega)_{i,j} = \langle S_1(\omega)C_i; C_j \rangle$$

avec $h = 1/(N+1)$. Comme S_1 est compacte, il existe une suite de valeurs propres de M_h convergeant vers 0 quand $h \rightarrow 0$ (le vecteur propre associé est bien entendu instable). Ceci est très mauvais, car brouille la recherche d'une valeur propre effectivement nulle en

une fréquence donnée; il faut donc preconditionner la matrice. Une possibilité consiste à remplacer $S_1(\omega)$ par $S_o^{-1}S_1(\omega)$ où $\forall g \in H^{-1/2}(\Gamma)$:

$$S_o \cdot g(\gamma(x)) = - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \log(|x - y|) g(\gamma(y)) d\gamma(y)$$

Lorsque le diamètre de Γ est strictement inférieur à 1, S_o est un opérateur symétrique réel défini positif, isomorphisme de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. L'inconvénient est que le nouvel opérateur n'est plus symétrique en général, et donc que l'obtention de la dérivée d'une valeur propre n'est plus simple. D'où l'amélioration: utiliser l'opérateur symétrique $S_o^{-1/2}S_1(\omega)S_o^{-1/2}$. Au sens de la petite étude qui suit, c'est le meilleur choix.

Exemple de l'effet du preconditionneur:

Considérons les résonances "D" (extérieures) liées au disque; elles sont les zéros des valeurs propres ($k = 0, 1, \dots$):

$$\lambda^{(k)}(\omega) = \frac{H_k^{(1)}(\omega)}{\omega H_k^{(1)'}(\omega)}$$

Nous supposons que poser le problème numérique revienne à ignorer les modes $e^{ik\theta}$ pour $k > N$. Les valeurs propres de M_h sont alors les $\lambda_h^{(k)}(\omega) = \lambda^{(k)}(\omega)$ pour $k = 0, 1, \dots, N = 1/h$. Or:

$$\lambda^{(k)}(\omega) \stackrel{k \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{-1}{k}$$

alors que l'indice $p = k(\omega)$ de la valeur propre cherchée s'annulant en ω_o est de l'ordre de $\Re(\omega)$ (autrement dit ω si $|\Im(\omega)| \ll \Re(\omega)$). Pour que la zone des fréquences au voisinage de ω_o , par exemple la boule B_δ , soit la plus étendue possible (δ maximal) de façon que l'effet de résonance persiste, il vaut mieux comparer (et c'est ici la meilleure solution) les quantités $k\lambda^{(k)}$, ce qui correspond au premier choix de preconditionnement.

5.7 Notes sur $T(\omega)$, fissure rectiligne élastique

5.7.1 Expression de $T(\omega)$ et de sa dérivée

Soit $u = [u_1, u_2], v = [v_1, v_2] \in V^2$; $T(\omega)$ est exprimé par:

$$\langle T(\omega)u; v \rangle = \sum_{i=1}^2 b_i(u_i, v_i)$$

où nous posons pour $u, v \in V$:

$$b_1(u, v) = B_1^0(u, v) + B_1^1(u, v)$$

$$b_2(u, v) = B_2^0(u, v) + B_2^1(u, v)$$

$$B_1^1(u, v) = -\omega^2 \int_{\Gamma \times \Gamma} K_o(-i\omega|x-y|)u(x)\bar{v}(y)dx dy$$

$$B_2^1(u, v) = -\omega^2 \int_{\Gamma \times \Gamma} K_o(-i\omega\alpha|x-y|)u(x)\bar{v}(y)dx dy$$

$$B_j^0(u, v) = \frac{-4i}{\mu} \int_{\Gamma \times \Gamma} K_j^o(|x-y|)u'(x)\bar{v}'(y)dx dy$$

$$\frac{i}{\mu} K_1^o(x) = \alpha^2 K_o(-i\omega\alpha|x|) - K_o(-i\omega|x|) - \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2}{dx^2} D_o(x)$$

$$\frac{i}{\mu} K_2^o(x) = D_o(x) + \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2}{dx^2} D_o(x)$$

$$D_o(x) = K_o(-i\omega|x|) - K_o(-i\omega\alpha|x|)$$

Remarque: nous avons pris $i\mu = 4$, $V_s = 1$, $V_p = \frac{1}{\alpha} (> 1)$. Les expressions des b_i sont donc:

$$b_1(u, v) = 4 \int_{\Gamma \times \Gamma} \left[\frac{K_o'(-i\omega|x-y|)}{-i\omega|x-y|} - \alpha^2 \frac{K_o'(-i\omega\alpha|x-y|)}{-i\omega\alpha|x-y|} \right] u'(x)\bar{v}'(y)dx dy$$

$$- \omega^2 \int_{\Gamma \times \Gamma} K_o(-i\omega|x-y|)u(x)\bar{v}(y)dx dy$$

$$b_1(u, v) = \int_{\Gamma \times \Gamma} K_o(-i\omega\alpha|x-y|) \{ (1 - \alpha^2)u'(x)\bar{v}'(y) - \omega^2 u(x)\bar{v}(y) \} dx dy$$

$$- 4 \int_{\Gamma \times \Gamma} \left[\frac{K_o'(-i\omega|x-y|)}{-i\omega|x-y|} - \alpha^2 \frac{K_o'(-i\omega\alpha|x-y|)}{-i\omega\alpha|x-y|} \right] u'(x)\bar{v}'(y)dx dy$$

Calcul des dérivées:

$$-\omega \frac{\partial}{\partial \omega} b_1(u, v) = 2b_1(u, v)$$

$$- 4 \int_{\Gamma \times \Gamma} K_o(-i\omega|x-y|)u'(x)\bar{v}'(y)dx dy$$

$$+ 4\alpha^2 \int_{\Gamma \times \Gamma} K_o(-i\omega\alpha|x-y|)u'(x)\bar{v}'(y)dx dy$$

$$+ \omega^2 \int_{\Gamma \times \Gamma} -i\omega|x-y| K_o'(-i\omega|x-y|)u(x)\bar{v}(y)dx dy$$

$$\begin{aligned}
-\omega \frac{\partial}{\partial \omega} b_2(u, v) &= 2b_2(u, v) \\
&-4 \int_{\Gamma \times \Gamma} \int_{\Gamma} K_o(-i\omega\alpha|x-y|) \{(2-\alpha^2)u'(x)\bar{v}'(y) \\
&\quad -\omega^2(1-\alpha^2(1-\alpha^2))u(x)\bar{v}(y)\} dx dy \\
&+4 \int_{\Gamma \times \Gamma} \int_{\Gamma} K_o(-i\omega|x-y|) u'(x)\bar{v}'(y) dx dy \\
&- \int_{\Gamma \times \Gamma} \int_{\Gamma} [-i\omega\alpha|x-y| K_o'(-i\omega\alpha|x-y|)] (4(1-\alpha^2)\alpha^2 - 1) u(x)\bar{v}(y) dx dy
\end{aligned}$$

Singularité des noyaux: pour tous ceux non définis en zéros, elle est en log; le calcul d'intégrale le plus délicat est celui de noyau $F_1(-i\omega|x|)$ (multiplié par $u'(x)\bar{v}'(y)$):

$$F_1(z) = K_o'(z)/z - \alpha^2 K_o'(\alpha z)/(\alpha z)$$

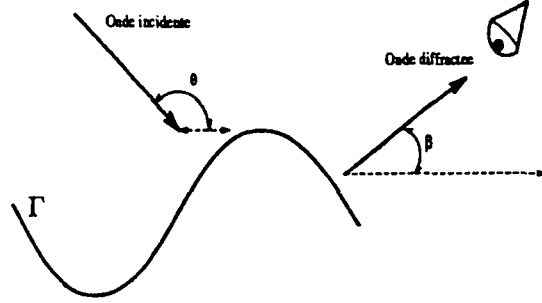
$$\underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1-\alpha^2}{4} (1 - 2(\gamma + \log(z/2))) + \frac{\alpha^2}{2} \log(\alpha)$$

il peut y avoir des erreurs numériques si α est voisin de zéro.

5.8 Etude de la section efficace en dim2

5.8.1 Ondes acoustiques

Nous supposons que l'obstacle est une fissure courbe. Des résultats numériques sont donnés pour le cas rectiligne.



$$u_\theta(x, y) = e^{-i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \quad \text{onde incidente}$$

L'onde réfléchie est $\tilde{u}_\beta(x, y)$, et son comportement quand $r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ est:

$$\tilde{u}_\beta(x, y) \simeq A(\theta, \beta, \omega) \frac{e^{i\omega r}}{\sqrt{r\omega}}$$

A est l'amplitude de diffusion. Son expression dans le cas de la fissure rectiligne est:

$$A(\theta, \beta, \omega) = (c*) \int_\Gamma e^{-i\omega t \cos \beta} \phi_\theta(t) \omega \cos \beta dt$$

où

$$\phi_\theta = [\tilde{u}_\beta] = -T(\omega)^{-1} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial n} \right)$$

En effet, nous utilisons:

$$H_0^{(1)}(z) \stackrel{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\pi/4} e^{iz}$$

et

$$\tilde{u}_\beta(x, y) = \frac{1}{4i} \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial t} H_0^{(1)}(\omega \sqrt{r^2 - 2rt \cos \beta + t^2}) \phi_\theta dt$$

Remarque: A est précisément la Transformée de Fourier de ϕ_θ , donc:
 $A = 0 \ (\forall \beta) \iff \phi_\theta = 0 \ (\theta \text{ est fixé}).$

Calcul de la section efficace:

Soit la quantité définie par:

$$\sigma_\theta = \int_0^{2\pi} |A(\theta, \beta, \omega)|^2 d\beta$$

La section efficace est :

$$\sigma(\omega) = \int_0^{2\pi} \sigma_\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |A(\theta, \beta, \omega)|^2 d\beta d\theta$$

Théorème 5.3

$$\sigma_\theta = -\Im \langle g_\theta; T(\omega)^{-1} g_\theta \rangle$$

où

$$g_\theta = \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial n} \right)_\Gamma = -i\omega \sin(\theta) e^{i\omega x \cos \theta} \quad x \in \Gamma$$

Démonstration: :

Soit une boule Ω_R de rayon R grand, contenant Γ ; on a:

$$\int_{\Omega_R} [|\nabla \tilde{u}_\beta|^2 - \omega^2 |\tilde{u}_\beta|^2] d\Omega = \int_\Gamma \left(\frac{\partial \tilde{u}_\beta}{\partial n} \right) [\tilde{u}_\beta] - \int_{S_R} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\beta}{\partial n} \right) \tilde{u}_\beta d\sigma_R$$

S_R est la sphère de rayon R . Nous avons :

$$[\tilde{u}_\beta] = \phi_\theta = T(\omega)^{-1} g_\theta$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}_\beta}{\partial n} \right) = -g_\theta$$

$$\int_{S_R} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\beta}{\partial n} \right) \tilde{u}_\beta d\sigma_R = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{u}_\beta}{\partial r} \tilde{u}_\beta \cdot r d\beta$$

$$\stackrel{R \rightarrow \infty}{\simeq} -i \int_0^{2\pi} |A(\theta, \beta, \omega)|^2 d\beta = -i\sigma_\theta$$

donc:

$$\int_{\Omega_R} [|\nabla \tilde{u}_\beta|^2 - \omega^2 |\tilde{u}_\beta|^2] d\Omega = - \int_\Gamma g_\theta \bar{\phi}_\theta + i\sigma_\theta$$

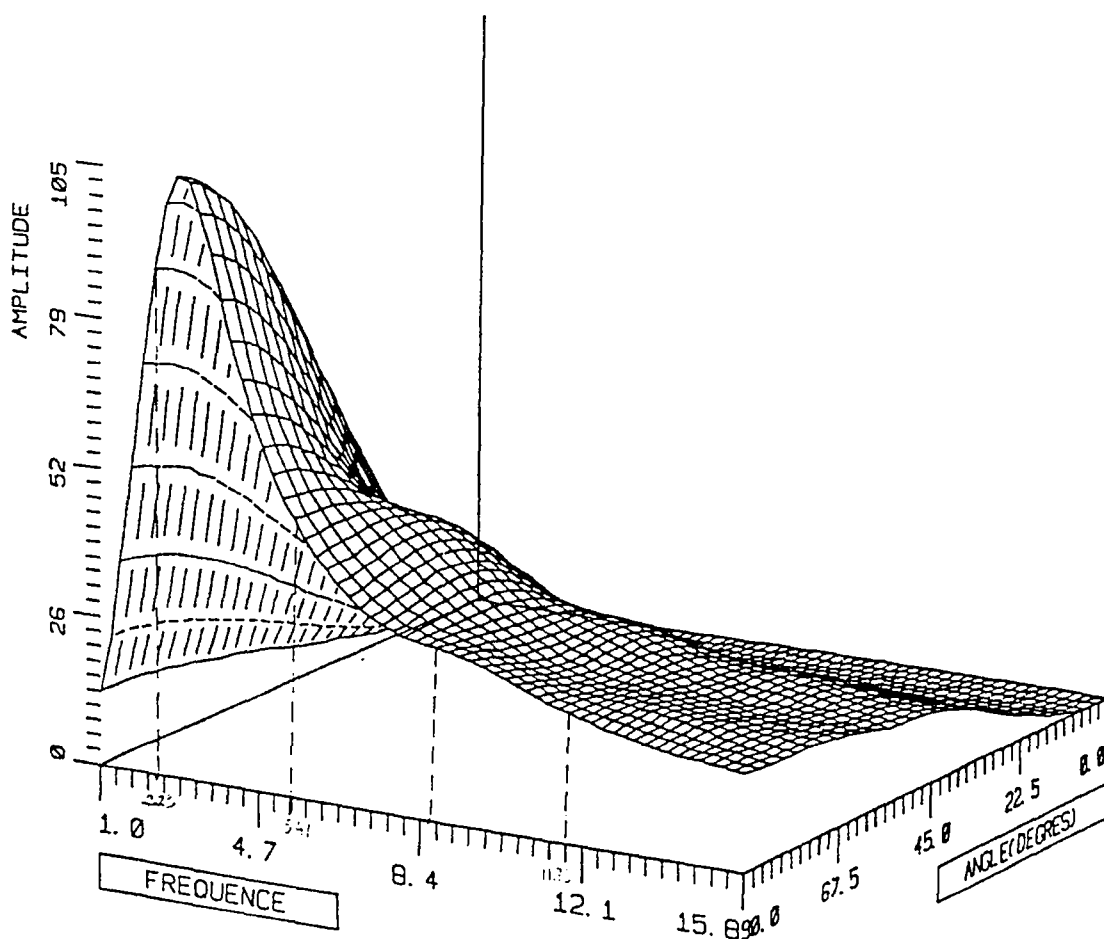
ω étant réel, nous en déduisons:

$$\sigma_\theta = -\Im \left(\int_\Gamma g_\theta \bar{\phi}_\theta \right)$$

Résultats numériques:

La figure a1 donne σ_θ en fonction de θ et ω . C'est une surface avec un sommet principal correspondant à la première résonance, et maximum lorsque l'onde incidente arrive perpendiculairement à l'axe de la fissure ($\theta = 90^\circ$); Les autres bosses décroissent rapidement en hauteur, tandis que l'angle d'incidence correspondant s'écarte sensiblement de 90° . La figure a2 montre l'effet des résonances sur la section efficace $\sigma(\omega)$: sous la courbe d'amplitude sont représentées selon un autre axe les pôles complexes ω_j de la fissure. Notons cependant un petit décalage entre les maxima de σ et les $\Re(\omega_j)$.

figure a1



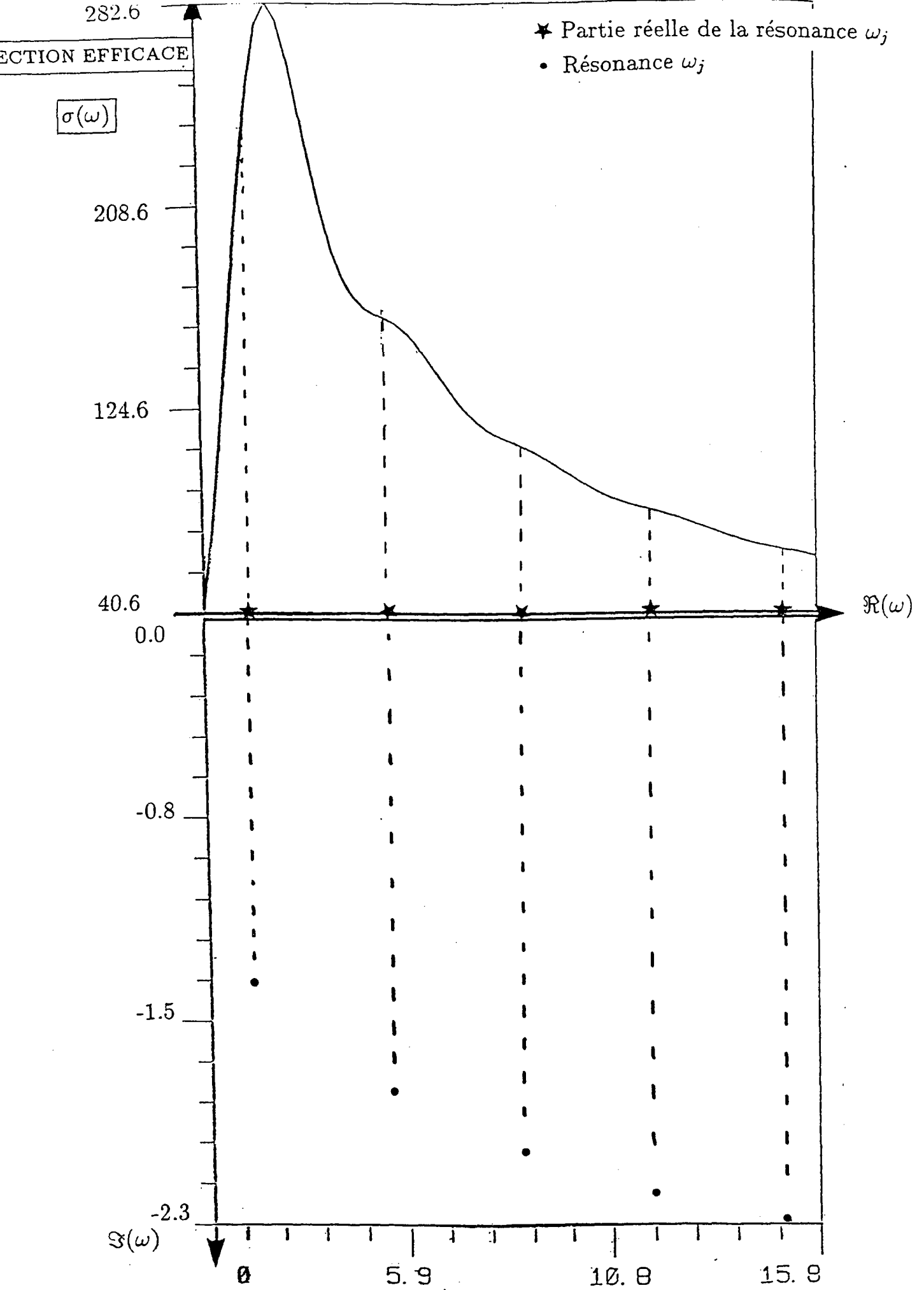


figure a2
57 bis

5.8.2 Ondes élastiques: cas du disque (de rayon 1)

Nous allons essayer d'évaluer la section efficace (appelée aussi signature) aux fréquences $\Re(\omega_j)$, ω_j étant la $j^{\text{ième}}$ résonance de la "1^{ière}" courbe, et $j \rightarrow \infty$. Nous reprenons les notations de la section 3.2, la suite ω_n de résonances trouvées au théorème 3.3; S ou s (respect: P ou p) caractérisera les ondes S (respect: P) et '-' désigne ce qui est diffracté; les ondes incidentes sont:

$$u_S = i\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^{-1} \vec{\nabla} \wedge \Psi_S$$

$$u_P = i\left(\frac{\omega}{V_p}\right)^{-1} \vec{\nabla} \Psi_P$$

où:

$$\Psi_{S(P)} = e^{-i\frac{\omega}{V_{s(p)}}(\vec{X} \cdot \vec{n}_\beta)}$$

\vec{n}_β est le vecteur unitaire dans la direction β

D'où

$$\sigma_{rr}^S(\theta) = \mu\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2 \sin 2(\theta - \beta) \Psi_S(1, \theta)$$

$$\sigma_{r\theta}^S(\theta) = \mu\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2 \cos 2(\theta - \beta) \Psi_S(1, \theta)$$

θ = angle donné par $\vec{X} \in \mathbb{R}^2$. La condition frontière s'écrit:

$$\sigma(\vec{u}_S) \cdot \vec{n}_\theta = -\sigma(u_S) \cdot \vec{n}_\theta = -\mu\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2 g_S(\theta)$$

avec:

$$g_S(\theta) = \begin{pmatrix} \sin 2(\theta - \beta) \\ \cos 2(\theta - \beta) \end{pmatrix} \Psi_S(1, \theta) = (g_S^{(1)}, g_S^{(2)})$$

L'indice n signifie que l'on a décomposé selon $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$g_S(\theta) = \sum_n g_{S,n} e^{in\theta}$$

Un petit calcul donne:

$$-ig_{S,n}^{(1)} = (-1)^n \pi e^{-in\beta} [J_{n-2}\left(\frac{\omega}{V_s}\right) - J_{n+2}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)]$$

$$g_{S,n}^{(2)} = -(-1)^n \pi e^{-in\beta} [J_{n-2}\left(\frac{\omega}{V_s}\right) + J_{n+2}\left(\frac{\omega}{V_s}\right)]$$

et rappelons que l'on a:

$$\frac{1}{2}[J_{n-2}(nz) + J_{n+2}(nz)] \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} J_n(nz) \cdot \left(\frac{2}{z^2} - 1\right)$$

$$\frac{1}{2}[J_{n-2}(nz) - J_{n+2}(nz)] \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} -2 \frac{(1-z^2)^{1/2}}{z} J_n(nz)$$

La section efficace de l'onde S est:

$$\zeta_S = \sum_n \zeta_{S,n} = (-\omega)^2 \Im \left(\sum_n \bar{g}_{S,n} \cdot \bar{u}_{S,n} \right)$$

avec:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{S,n} &= \Phi'_n(r) \bar{e}_r + \frac{in}{r} \Phi_n \bar{e}_\theta + \frac{in}{r} \Psi_n \bar{e}_r - \Psi'_n(r) \bar{e}_\theta \\ \Phi_n(r) &= ia_n H_n^{(1)}(\omega r / V_p) \\ \Psi_n(r) &= b_n H_n^{(1)}(\omega r / V_s) \end{aligned}$$

a_n et b_n sont solutions du problème linéaire:

$$M^n(\omega) \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = -\left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2 \begin{pmatrix} ig_{S,n}^{(1)} \\ g_{S,n}^{(2)} \end{pmatrix}$$

où $M^n(\omega)$ est la matrice des M_{ij}^n décrits au 3.2. Posons $X_n = \Re(\omega_n) \sim nC_R$ quand $n \rightarrow \infty$

Autres notations : $\alpha = \frac{V_S}{V_P}$, $V_S = 1$ $\Psi_S = \Psi(C_R)$, $\Psi_P = \Psi(\alpha C_R)$

Nous avons:

$$(-X_n^2) \zeta_{S,n}(X_n) = \Im \{ [\Phi'_n(1) + in\Psi_n(1)] \bar{g}_{S,n}^{(1)} + [in\Phi_n(1) - \Psi'_n(1)] \bar{g}_{S,n}^{(2)} \} \equiv \Im(K)$$

Or quand n est grand:

$$\begin{aligned} \Phi_n(1) &\simeq -a_n Y_n(\alpha X_n) \\ \Phi'_n(1) &\simeq na_n \alpha C_R (1 - \alpha^2 C_R^2)^{1/2} Y_n(\alpha X_n) \\ \Psi_n(1) &\simeq ib_n Y_n(X_n) \\ \Psi'_n(1) &\simeq -inb_n C_R (1 - C_R^2)^{1/2} Y_n(X_n) \\ M_{11}^n(X_n) &\simeq in^2 (2 - C_R^2) Y_n(\alpha X_n) \\ M_{12}^n(X_n) &\simeq -2in^2 C_R (1 - C_R^2)^{1/2} Y_n(X_n) \\ M_{21}^n(X_n) &\simeq -2in^2 \alpha C_R (1 - \alpha^2 C_R^2)^{1/2} Y_n(\alpha X_n) \\ M_{22}^n(X_n) &\simeq in^2 (2 - C_R^2) Y_n(X_n) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc:

$$-K \simeq a |g_{S,n}^{(1)}|^2 + b |g_{S,n}^{(2)}|^2 + ic g_{S,n}^{(1)} g_{S,n}^{(2)}$$

a, b et c ont en facteur commun F: $a = Fa'$, $b = Fb'$, $c = Fc'$ où:

$$F = \frac{in^4 C_R^2}{D_n(X_n)} Y_n(X_n) Y_n(\alpha X_n) \cdot (in)$$

Finalement:

$$K = \frac{n^5}{D_n(X_n)} C_R^4 Y_n(X_n) Y_n(\alpha X_n) J_n^2(X_n) (2\pi)^2 K_1$$

et

$$K_1 = (1 - C_R^2)^{1/2} / C_R [4\alpha(1 - \alpha^2 C_R^2)^{1/2} (1 - C_R^2)^{1/2} + (\frac{2}{C_R^2} - 1)^2 C_R^2 + 2(2 - C_R^2)] > 0$$

L'évaluation de $D_n(X_n)$ est obtenue grâce au comportement de la partie imaginaire des résonances; nous trouvons:

$$D_n(X_n) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} i n^4 Y_n(X_n) Y_n(\alpha X_n) \cdot (c*) e^{-2n\psi_s}$$

La formule pour $\zeta_{S,n}(X_n)$ est donc:

$$\begin{aligned} (X_n^{-2}) \zeta_{S,n}(X_n) &\stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} [e^{2n\psi_s} \cdot n \cdot J_n^2(X_n)] \cdot (c*) C_R^4 K_1 \\ &\sim \mu(C_R) \end{aligned}$$

Remarque:

$$(X_n^{-2}) \cdot \|\sigma_r\|_{L^2} = cste \text{ (independante de } \omega \text{)}$$

Conclusion:

$\zeta_{S,n}(X_n)$ apporte une contribution de l'ordre de $\|\sigma(u_S) \cdot \tilde{n}\|_{L^2}$. Il n'en est pas de même pour l'onde P, car le terme $J_n(X_n)$ devient $J_n(\alpha X_n)$, donc:

$$(X_n^{-2}) \zeta_{P,n}(X_n) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} (c*) e^{-2n(\Psi_P - \Psi_S)}$$

$$\text{et } \Psi_P - \Psi_S > 0$$

L'effet des résonances sur l'onde P est par conséquent nul. Pour l'onde S, nous attendons une signature ayant une forme comme dans la figure 9.

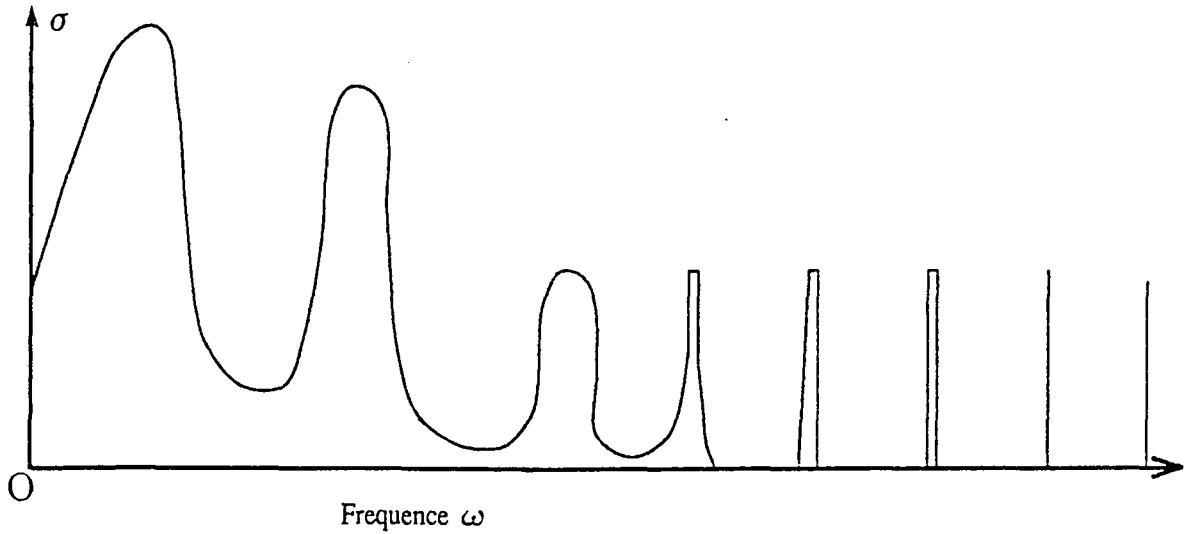


Figure 9 : Signature radar

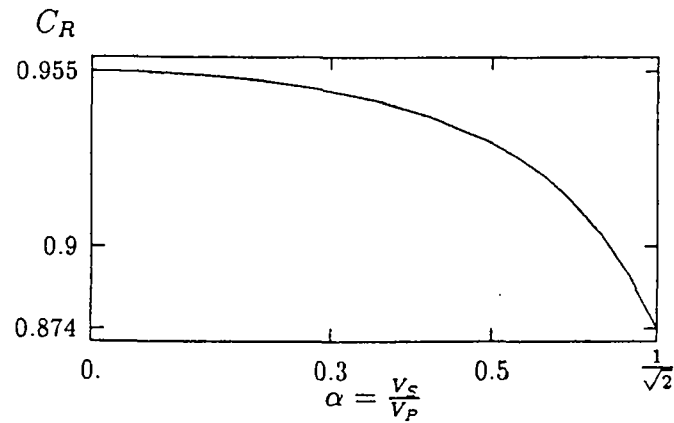
Note: Variations de C_R avec α :

C_R est racine non nulle de la fonction:

$$f_\alpha(x) = (2 - x^2) - 4(1 - x^2)^{1/2}(1 - \alpha^2 x^2)^{1/2}$$

α est dans $]0; \frac{1}{\sqrt{2}}[$ et $0 \leq x \leq 1$. Donc C_R^2 est la racine réelle d'un polynôme de degré 3. La fonction $\alpha \rightarrow C_R$ est finalement strictement décroissante (voir figure 10).

Figure 10 : C_R en fonction de α



Références

- [1] M. ABRAMOWITZ and I. STEGUN. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publication, 1968.
- [2] AUBIN. *Approximation of elliptic boundary value problems*. Wiley-Interscience, 1972.
- [3] A. BAMBERGER. Approximation de la diffraction d'ondes élastiques, une nouvelle approche. In *Nonlinear partial differential equations and their applications*, volume VI, pages 48-95. Pitman, 1984.
- [4] BARDOS, LEBEAU, and RAUCH. Pôles de la diffusion acoustique et singularités Gevrey 3. 1985-1986.
- [5] C. BARDOS and J.C. GUILLOT and J. RALSTON. La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Applications à la théorie de la diffusion. 1982.
- [6] R. CAMPBELL. *Théorie générale de l'équation de Mathieu et de quelques autres équations différentielles de la mécanique*. Masson & Cie, 1955.
- [7] A. GERARD. Factorisation de l'équation caractéristique d'une sphère élastique multicouches: interprétation des résonances. *C.R. ACAD. SC. PARIS*, Juillet 1983.
- [8] Jean GIROIRE. *Etude de quelques problèmes aux limites extérieures et résolution par équations intégrales*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1987. Thèse d'Etat.
- [9] Christophe HASARD. *Etude des résonances pour le problème linéarisé des mouvements d'un navire sur la houle*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1991. Thèse d'Etat.
- [10] HEYMAN and FELSEN. Creeping waves and resonances in transient scattering by smooth convex objects. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, AP-31(3), May 1983.
- [11] J.S. HOWLAND. Simple poles of operator-valued-functions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1971.
- [12] M. IKAWA. Decay of solutions of the wave equation in the exterior of two convex obstacles. *J. Math., Osaka*, 19:459-509, 1982.
- [13] M. IKAWA. On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles. *Journal of mathematics of Kyoto university*, 23(1), 1983.
- [14] Patrick JOLY. *Analyse numérique et mathématique de problèmes liés à la propagation d'ondes acoustiques, élastiques et électromagnétiques*. PhD thesis, Université Paris IX, 1987. Thèse d'Etat.

- [15] T. KATO. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, 1966.
- [16] LENOIR and VULLIERME-LEDARD. Variational formulations for the determination of resonant states in some scattering problems. Technical report, E.N.S.T.A, 1988.
- [17] Marc LENOIR. Approximation par éléments finis des problèmes elliptiques. Technical report, E.N.S.T.A, 1987.
- [18] J.L. LIONS and E. MAGENES. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, volume 1-2. Dunod, 1968.
- [19] J.C. NEDELEC. Le potentiel de double couche pour les ondes élastiques. Technical Report 99, Ecole Polytechnique, C.M.A.P, 1983.
- [20] F.W.J. OLVER. *Asymptotics and special functions*. Academic Press, 1974.
- [21] A. RAMM. *Scattering by obstacles*. D.Reidel publishing company, 1988.
- [22] Stanly STEINBERG. Meromorphic families of compact operators. *Arch. Ration. Mech. Anal*, 31, 1968.
- [23] H. UBERALL and J.W. DICKEY. Acoustic high-frequency scattering by elastic cylinders. *Acoustical Society of America*, 66(1), July 1979.
- [24] H. UBERALL, J.W. DICKEY, and G.V. FRISK. Surface wave modes on elastic cylinders. *Acoustical Society of America*, 58(5), November 1975.
- [25] H. UBERALL, L.R. DRAGONETTE, and L. FLAX. Relation between creeping waves and normal modes of vibration of a curved body. *Acoustical Society of America*, 61(3), March 1977.
- [26] H. UBERALL, L. FLAX, and L.R. DRAGONETTE. Theory of elastic resonance excitation by sound scattering. *Acoustical Society of America*, 63(3), March 1978.
- [27] WEI, MAJDA, and STRAUSS. Imaginary poles of radial potentials. *Minnesota, Minneapolis, MN 55455*, 198?
- [28] J. WEIDMANN. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer-Verlag, 1980.
- [29] C.H. WILCOX. *Scattering theory for the d'Alembert equation in exterior domains*. Springer-Verlag, 1975.

ISSN 0249 - 6399